Universidade de Aveiro Departamento de Educação
2013

Elisabete Marinho Dias

A Geometria Sona e as isometrias: uma experiência no ensino básico

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Didática - Especialização em Matemática para professores do 3º CEB/Secundário, realizada sob a orientação científica da Doutora Fátima Regina Jorge, Professora Adjunta da Unidade Técnico-científica de Ciências, Desporto e Artes da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Aos meus pais, marido e filha.

o júri

presidente

Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora auxiliar da universidade de Aveiro

Prof. Doutor Paulo José Martins Afonso
Professor adjunto da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Prof. Doutora Fátima Regina Jorge
Professora adjunta do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Agradecimentos

A concretização deste trabalho só foi possível devido ao contributo primoroso de algumas pessoas. Desta forma, gostaria de expressar a minha gratidão a todos aqueles que deram o seu apoio, uns mais presentes que outros, porém, todos se revelaram valiosos para a execução de um trabalho desta natureza. À Doutora Fátima Regina Jorge, cuja orientação foi determinante para o avanço progressivo deste trabalho. Também pela disponibilidade e auxílio que demonstrou em todas as fases da execução deste projeto. Aos alunos que aceitaram participar neste estudo, pela sua disponibilidade e colaboração. Aos meus amigos pela amizade e incentivo constantes. À minha família e ao meu marido, pelo carinho e apoio permanente. Aos meus pais pelos valores éticos e morais que me incutiram. Pelo seu exemplo de perseverança e tenacidade perante a vida que motivaram o lavrar de um projeto desta natureza. Muito obrigada. À minha filha, Eva, pelo tempo que não lhe dediquei, pelas brincadeiras, pelos passeios, pela presença da mãe, que por vezes esteve ausente, quando dela precisava.

palavras-chave

Didática da Matemática; Educação Básica; Isometrias; Geometria *Sona;* Etnomatemática; Dimensão cultural da matemática;

Resumo

A preocupação com os níveis de insucesso escolar em matemática, com a falta de interesse e de empenhamento dos alunos na realização de atividades matemáticas, aliada à realidade multicultural atual das escolas portuguesas e que temos vivenciado na nossa prática docente, conduziu-nos ao desenvolvimento de um estudo centrado na problemática da integração de uma perspetiva etnomatemática no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Sustentados na revisão de literatura efetuada encaramos a etnomatemática como um recurso didático que pode promover aprendizagens dos conteúdos curriculares, incrementar a motivação para a realização de tarefas matemáticas, desenvolver atitudes positivas em relação à disciplina, favorecendo, em simultâneo, a consciencialização sobre o valor social e cultural da matemática. Neste âmbito, centramos a nossa atenção nos estudos desenvolvidos por Paulus Gerdes sobre diferentes manifestações culturais de povos africanos e, em particular, sobre os desenhos sona praticados pelo povo Cokwe, que ocupa territórios do leste de Angola, sul da República Democrática do Congo e do oeste da Zâmbia. Estes desenhos, além da difícil execução e de uma beleza ímpar, encerram inúmeras ideias matemáticas das quais se destacam, em particular, as relacionadas com as isometrias e simetrias.

O estudo, inserido na problemática referida, foi norteado pela seguinte questão de investigação: Em que medida o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem em que se exploram aspetos socioculturais da matemática, com recurso à geometria *sona*, contribui para a aprendizagem das isometrias, ao nível de conhecimentos, capacidades e ao nível atitudinal e afetivo?

Desta questão emergiram três grandes objetivos: i) Conceber, desenvolver e avaliar uma sequência/unidade didática integrando desenhos tradicionais africanos (desenhos *sona*) para a abordagem das isometrias no 9.º ano de escolaridade; ii) evidenciar o valor da geometria *sona* para a aprendizagem das isometrias; iii) Analisar se a introdução em sala de aula de contextos socioculturais contribui para motivar os alunos para a realização de atividade matemática e para a valorização do papel da matemática na vida social e cultural.

Neste estudo participaram alunos, que frequentam o 3.º ciclo do Ensino Básico de uma Escola Básica 2/3, do concelho de Sintra, tendo a docente - investigadora a dupla função de investigar e de lecionar a disciplina de matemática. Destaca-se o número elevado de alunos com insucesso nesta disciplina, uma percentagem considerável de origem não portuguesa e, de dentro destes, sobressaem os discentes de origem africana ou cujos ascendentes são africanos, tratando-se por isso de uma turma multicultural.
Este trabalho seguiu uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, com uma vertente de investigação ação, a partir de uma abordagem curricular em geometria do 3.º ciclo.
As técnicas de recolha de dados utilizadas foram a inquirição, a observação e a análise documental. Dos instrumentos usados para a recolha de dados destacam-se: questionários aplicados aos alunos, notas de campo, testes de avaliação formativo e sumativo e as produções dos alunos dentro e fora da sala de aula decorrentes das tarefas propostas pela docente.
Os dados recolhidos foram analisados através da técnica de análise de conteúdo com base em duas categorias de análise: desempenho matemático e desempenho afetivo e atitudinal. Com vista a tornar mais eficaz a análise e posterior interpretação dos dados, para cada uma das categorias foram definidas duas dimensões de análise. Dos resultados e principais conclusões do estudo destaca-se que a exploração didática dos desenhos sona revelou potencialidades para a apropriação de conhecimentos matemáticos e para o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina. As tarefas propostas aos alunos despertaram interesse, motivando-os para a realização de atividades matemáticas e influenciaram, de forma positiva, a aprendizagem das isometrias e simetria axial e rotacional. Apesar de, ao longo do desenvolvimento da unidade didática, se continuarem a identificar nalguns alunos dificuldades de aprendizagem, foi patente o empenho da turma nas atividades, refletido nos resultados obtidos no teste de avaliação sumativa.

keywords

Didactics of Mathematics; Basic Education; Isometries; Sona Geometry; Ethnomatematics; Cultural dimension of mathematics

abstract

The concern with levels of school failure in mathematics, with the lack of interest and commitment of the students in performing mathematical activities, coupled with the current multicultural reality of Portuguese schools and we have experienced in our teaching practice, led us to the development of a study focused on the problem of integrating an ethnomathematics perspective in the teaching and learning of mathematics. Supported in the literature review conducted face ethnomathematics as a teaching resource that can promote learning of curriculum content, increase motivation to perform mathematical tasks, develop positive attitudes to discipline, while favoring the awareness of the social value and cultural mathematics. In this context, we focus our attention on studies conducted by Paul Gerdes on different cultural manifestations of African peoples and, in particular, about the sona drawings Cokwe practiced by the people, occupying territories east of Angola, southern Democratic Republic of Congo and western Zambia. These drawings, in addition to the hard running and a unique beauty, contain numerous mathematical ideas which stand out in particular those related to geometry transformations, isometries and symmetries. The study, included in the issue that has been guided by the following research question: To what extent the development of teaching and learning strategies that are explored sociocultural aspects of mathematics, using the geometry sona, contributes to the learning of isometries, the level of knowledge, skills and attitudinal and emotional level? This issue emerged three main objectives: i) to design, develop and evaluate a sequence / teaching unit incorporating traditional African designs (sona drawings) for the approach of isometries in 9. Secondary school, ii) demonstrate the value of geometry for sona learning isometries; iii) Analyse the introduction in classroom sociocultural contexts helps to motivate students to perform mathematical activity and the enhancement of the role of mathematics in social and cultural life. We defined as participants, students in a class of 9. Third year, with 23 students, who attend the 3. Cycle of Basic Education in a Primary School 2/3 in the municipality of Sintra, with teaching - investigating the dual function to investigate and to teach the discipline of mathematics. Noteworthy is the high number of students who have failed in this discipline, a considerable percentage of students from non-Portuguese origin and a large number of students of African origin or whose ancestors are African, so the case of a multicultural class. This work followed a methodology of qualitative research, with a strand of research action, from a curricular approach in geometry 3. Cycle.

The data collection techniques used were the interviews, observation and document analysis. The instruments used for data collection include: questionnaires administered to students, field notes, tests and formative and summative student productions inside and outside the classroom under the tasks proposed by the teacher.
The data collected were analyzed using the technique of content analysis based on two categories of analysis: mathematical performance and affective and attitudinal performance. With a view to more effective analysis and subsequent interpretation of the data, for each of the categories were defined two dimensions of analysis.
The results and main conclusions of the study highlights that the exploration of didactic sona drawings revealed potential for appropriation of mathematical knowledge and the development of positive attitudes towards discipline. The tasks proposed to students, aroused interest, motivating them to perform mathematical activities and influenced, positively, learning isometries and axial and rotational symmetry. Although, throughout the development of the teaching unit, if they continue to identify some students learning difficulties, was rank the commitment of the class activities, reflected in the test results of summative assessment.

Ìndice

Lista de figuras

Lista de Tabelas

Lista de siglas e abreviaturas

APM- Associação de professores de matemática

CNEB- Currículo Nacional do Ensino Básico

ME- Ministério da Educação

OCDE - Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico

PISA- Programme for International Student Assessment

SPM- Sociedade Portuguesa de Matemática

GAVE- Gabinete de avaliação educacional

UNESCO- Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

DGIDC- Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

TIMSS- Trends in International Mathematics and Science Study

ISEGm- Grupo internacional de estudos em etnomatemática

NPMEB- Novo programa de matemática do ensino básico

DEB- Departamento de Educação Básica

DGEBS- Direção Geral do Ensino Básico e Secundário

NCTM- National Council of Teachers of Mathematics

ed.-edição

p. –página

pp- páginas

s/d- sem data

s/p- sem página

trad.- tradução

vol. - volume

Capítulo 1- Introdução

Nestas páginas introdutórias procuramos evidenciar o contexto e a relevância do estudo. De seguida, apresentamos o problema, os objetivos e as questões que nortearam a investigação que levamos a efeito numa turma do 9.º ano de escolaridade de uma escola do concelho de Sintra. Por fim, faremos referência a aspetos relativos à organização da dissertação.

1.1 Contextualização

Inicialmente, pensamos desenvolver uma investigação sobre o insucesso escolar em matemática. O interesse por esta problemática sempre foi uma constante na nossa vida profissional que se agudizou quando começamos a exercer funções na escola na qual atualmente lecionamos. Trata-se de uma escola inserida num contexto socioeconómico desfavorecido, com uma forte presença de comunidades emigrantes com origens muito diversificadas. Integrada num agrupamento vertical, a escola é frequentada por alunos com idades e características muito heterogéneas, destacando-se os elevados níveis de insucesso em matemática acompanhados por uma falta de interesse e empenhamento generalizado na realização das tarefas propostas pela professora de matemática. Daí que consideramos premente encontrar e implementar estratégias para combater o insucesso e concomitantemente a falta de motivação e interesse pela disciplina.

Como professora de matemática, constatamos que a matemática continua a ser a disciplina que apresenta um grau de aversão elevadíssimo, com alguns traumas na história de vida dos alunos, considerando essa disciplina difícil de aprender e de se ensinar, deixando assim, lacunas na formação daqueles que estão sob a nossa responsabilidade. Verificamos, igualmente, que quando se ensina matemática, muitas vezes não se estabelece relações com outros aspetos da vida do aluno, pessoais ou académicos, o que contribui para a aquisição de um conhecimento compartimentalizado e redutor. Observamos, ainda, que as publicações e, em especial, a maioria dos manuais escolares abordam o estudo das civilizações antigas e das ditas menos evoluídas, sem a preocupação de misturar os diferentes aspetos do conhecimento matemático, contribuindo assim para uma formação menos globalizada. Estes entraves ao desempenho do professor fizeram-nos levantar as seguintes questões: Será que os professores estão a contribuir para que os alunos não gostem de matemática? Por que é que a matemática ainda se apresenta como a matéria escolar mais difícil de aprender? Por que é que os alunos sentem tantas dificuldades a aprender os conteúdos matemáticos? Como é que o professor pode contribuir para minimizar a aversão à matemática sentida pela maioria dos alunos? Que alternativas metodológicas são mais viáveis para abordar os conteúdos matemáticos em sala de aula? Será que a matemática escondida por detrás de diversos povos, etnias, grupos profissionais pode entrecruzar-se com a matemática formal e coabitar nas nossas escolas? A etnomatemática será uma boa ferramenta no processo ensino e de aprendizagem? Será que a etnomatemática pode contribuir para minorar o insucesso escolar? Será que as atividades com recurso à etnomatemática, nomeadamente inspiradas na cultura africana, poderão contribuir para a apreciação da Matemática? É tentando refletir sobre essas e outras questões relativas ao ensino e a aprendizagem de matemática, que nos proposemos desenvolver este trabalho.

Estando a frequentar um curso de Mestrado em Didática da Matemática, surgiu a oportunidade de desenvolver uma investigação que, desde o início, entendemos dever ser dirigida para a procura de estratégias que contribuam para uma maior motivação dos alunos para a realização de atividades matemáticas e, consequentemente, para a aprendizagem da disciplina. Dada a diversidade cultural dos nossos alunos e a prevalência de alunos com origem africanas, nomeadamente de países africanos de língua oficial portuguesa (PALOP), entendemos que o recurso à etnomatemática, segundo a perspetiva do educador matemático brasileiro Ubiritan D'Ambrósio, à matemática praticada por grupos culturais bem identificáveis, geralmente não escolarizados ou com pouca escolarização, é uma via cujas potencialidades educativas devem ser exploradas e refletidas.

Este trabalho foi criado, essencialmente, para atender às nossas necessidades como docente e ao facto de trabalhar com turmas com uma grande diversidade cultural. Trata-se, por isso, de um trabalho desenvolvido na prática, sobre a prática e cuja finalidade é compreender e melhorar essa prática. Sendo certo que a sociedade moderna valoriza cada vez mais o conhecimento, este conhecimento não se deverá limitar àquele que se adquire em situações formais, mas também deverá considerar os saberes adquiridos e praticados em contextos menos formais, exteriores à escola, mormente os usados em determinadas profissões, grupos culturais, etnias, etc.. Ora, a massificação do ensino tem contribuído para que se ignore a diversidade de saberes que existe dentro da própria escola, assim como da comunidade que a rodeia. Sendo consensual aceitar que nas sociedades contemporâneas esta diversidade e heterogeneidade têm tendência a aumentar, devem ser feitos esforços para se estabelecer uma ligação entre a escola e a comunidade, designadamente, ao nível da articulação entre o saber fora da escola e o saber escolar. No que diz respeito especificamente à matemática, sendo esta uma área tão importante de aplicação ao quotidiano e a outras áreas do saber, o processo educativo escolar deveria ter o cuidado de valorizar a atividade matemática cultural, implicando, não só conhecê-la, mas também trazer para o espaço escolar estas diferentes manifestações matemáticas (D'Ámbrósio, 1996). Contudo, este mesmo autor enfatiza que caraterizar a produção matemática em contextos sociais diversos pouco contribui para relacionar e entrecruzar os dois universos. Deste modo, D' Ambrósio aponta que um dos objetivos da etnomatemática consiste em estudar os saberes matemáticos locais e aproveitar estes saberes populares, integrando-os no currículo escolar. De acordo com Gerdes (1996), a incorporação, no currículo, de elementos/materiais pertencentes ao ambiente sócio-cultural dos alunos como ponto de partida para as atividades matemáticas na sala de aula, pode contribuir para aumentar a motivação dos alunos. Este autor também enfatiza que essa incorporação, ao valorizar os *backgrouns* culturais dos alunos, pode ajudar a aumentar a sua autoestima e a respeitar os outros e as diferentes culturas, condição indispensável para a vida nos ambientes multiculturais das sociedades contemporâneas. Por fim, Gerdes também destaca o papel da etnomatemática no desenvolvimento da compreensão do que é a matemática e das suas relações com as necessidades e atividades humanas.

O recurso didático a artefatos culturais em que ideias matemáticas estão presentes viabiliza uma aproximação cultural à matemática, por norma ausente do ensino da matemática e da práticas de muitos professores, entre os quais nos incluíamos antes de iniciar este estudo. Ora, este é um aspeto bem destacado no Programa de Matemática do Ensino Básico. De facto, neste documento curricular aponta-se como uma das finalidades que deve nortear o ensino da disciplina *Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência*, especificando-se que esta inclui o desenvolvimento nos alunos de *compreensão da Matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua história,* bem como de *capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários sectores da vida social* (Ponte *et al*., 2007, p. 3).

Considerando a escassez de estudos, incidindo sobre as potencialidades do uso educativo da etnomatemática em escolas portuguesas, sentimos a necessidade de explorar e pesquisar a nível pessoal, profissional e académico, com mais profundidade o tema. Como já referimos, a escolha da problemática deve-se essencialmente a duas razões: a primeira relacionada com o facto do insucesso escolar em matemática afetar diariamente muitos dos intervenientes no processo de ensino-aprendizagem e da consequente necessidade pessoal de encontrar estratégias/ferramentas, numa escola onde coabitam alunos de várias nacionalidades; a segunda razão, resultado da nossa prática, consiste em considerar que algo deve mudar nos professores por vontade e iniciativa próprias, revelando-se necessária uma reflexão da e na prática pedagógica de modo a aproveitar o que existe de positivo e alterar o que se considera menos benéfico para o sucesso escolar e educativo dos nossos alunos.

A ideia e a iniciativa de realizar esta investigação surgiu, igualmente, do facto de a geometria ser uma área em que os discentes sentem muitas dificuldades de aprendizagem e também porque o seu estudo constitui uma mais valia para o desenvolvimento cognitivo dos discentes e para a compreensão da natureza e do papel da matemática no mundo, tal como é patente na tendência de valorização e importância atribuída à geometria no currículo matemático, que se vem registando nos últimos anos. Dos vários tópicos do currículo de geometria do Ensino Básico, centraremos a minha atenção nas Isometrias, pois da nossa experiência letiva ressalta a constatação de que um número muito significativo dos alunos de 9.º ano de escolaridade possui dificuldades em compreender as diferentes isometrias e em reconhecer as suas propriedades. Importa referir que o estudo das transformações geométricas inicia-se no 1.º Ciclo do Ensino Básico por uma via essencialmente intuitiva, assistindo-se nos anos posteriores a uma formalização progressiva que termina no 9.º ano de escolaridade com a introdução do conceito de isometria, identificação da reflexão, translação e da rotação como isometrias e estudo das suas propriedades. A par destes conceitos é também explorada a noção de simetria e os diferentes tipos de simetria, apontando-se a importância de ajudar o aluno a percepcionar a presença destas ideias matemáticas em contextos diversificados, incluindo os do seu entorno social próximo. Para Bastos, o estudo das transformações geométricas é muito importante para a formação matemática dos alunos e justifica a necessidade de se atribuir uma maior atenção ao estudo das isometrias devido à sua relevância na história da matemática, e porque *constituem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocionar sobre o plano e o espaço* (Bastos, 2007, p. 23).

Em função do exposto, consideramos muito desafiante poder desenvolver uma investigação no âmbito da problemática da integração de uma perspetiva etnomatemática no processo de ensino e aprendizagem da matemática. A revisão da literatura sobre esta temática permitiu-nos, conhecer a Geometria *Sona* do povo *Cokwe* do Continente Africano e, muito particularmente, perceber que os desenhos tradicionais *sona*, de um povo que ocupa territórios do leste de Angola, sul da República Democrática do Congo e do oeste da Zâmbia, realizados sobre areia lisa e associados a lendas, a canções, a contos, etc., possuem potencialidades educativas que interessa explorar e integrar no processo de ensino e aprendizagem das isometrias e simetrias. De facto, estes desenhos, além da difícil execução e de uma beleza ímpar, encerram inúmeras ideias matemáticas que foram identificadas por Paulus Gerdes, matemático radicado em Moçambique, que tem dedicado parte do seu trabalho académico ao estudo dos *sona*, das quais se destacam as relacionadas com a geometria e as isometrias, em particular.

1.2 Problema, questões de investigação e objetivos da investigação

Deste modo, tomando a Geometria *Sona* como um recurso com potencialidades ao nível da Educação Matemática definimos, como orientadora do estudo, a seguinte questão:

- Em que medida o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem em que se exploram aspetos socioculturais da matemática, com recurso à geometria *sona*, contribui para a aprendizagem das isometrias, ao nível de conhecimentos, capacidades e ao nível atitudinal e afetivo?

As considerações anteriores, conduziram aos seguintes objetivos da investigação:

- Conceber, desenvolver e avaliar uma sequência/unidade didática integrando desenhos tradicionais africanos (desenhos *sona*) para a abordagem das isometrias no 9.º ano de escolaridade;

- Evidenciar o valor da geometria *sona* para a aprendizagem das isometrias;
- Analisar se a introdução em sala de aula de contextos socioculturais contribui para motivar os alunos para a realização de atividade matemática e para a valorização do papel da matemática na vida social e cultural.

Assim, a investigação procura articular aspetos socioculturais de um povo africano, os *Cokwe*, que realizam desenhos chamados de *Sona*, com a geometria das transformações isométricas presentes nos seus desenhos. Do ponto de vista teórico, fundamenta-se na teorização desenvolvida por autores como Uribitan D`Ambrósio e Paulus Gerdes e ampara-se nos Programas de Matemática do Ensino Básico de 2007 e de 1991**.** Para tal, foi desenvolvida e avaliada uma sequência didática contemplando tarefas de natureza diversificada para apoiar o processo de ensino e aprendizagem das isometrias e das simetrias (axial e rotacional) no 9.º ano de escolaridade.

1.3 Organização da dissertação

Relativamente à forma como se organiza a dissertação, após a contextualização do estudo atrás apresentada, proponho-nos fazer, no capítulo II, a sua fundamentação teórica, seguindo-se no capítulo III a apresentação e justificação das opções metodológicas tomada. No quarto capítulo, apresentamos e analisamos os dados recolhidos e, por fim, no quinto e último capítulo exponhomos as conclusões do estudo e apresentamos algumas limitações e sugestões para investigações futuras.

O segundo capítulo “Revisão da literatura”, estrutura-se em três partes. A 1.ª parte incide sobre Ensino e aprendizagem da matemática. A 2.ª parte inclui aspetos relacionados com a “Etnomatemática” e a “Educação intercultural e multicultural” e a 3.ª parte “Ensino da Geometria” recai sobre a Geometria no ensino básico, incluindo uma parte sobre –“Geometria no ensino básico“, “Isometrias e simetrias” e finalmente a “Geometria *Sona*”.

Na primeira parte, faz-se referência aos vários documentos curriculares de matemática do ensino básico, desde o início dos anos 90 até agora e ao protagonismo que o professor assume na gestão desse mesmo currículo em simultâneo com a importância da seleção e estruturação das tarefas por estes apresentadas. Aborda-se, de seguida, a parte afetiva na educação matemática, fazendo-se a distinção entre atitudes, emoções, crenças e valores e exibindo a importância e a influência destas no processo de ensino-aprendizagem. Por fim, aborda-se o insucesso escolar, nomeadamente em matemática, definindo, inicialmente, o conceito de insucesso escolar e o modo como afeta os alunos e a sociedade.

Na segunda parte, aborda-se, ainda, a etnomatemática, a sua conceptualização e a sua dimensão educacional. Discute-se, ainda, os conceitos de educação intercultural e multicultural, a sua importância e atualidade no ensino e a sua relação com a etnomatemática.

Na terceira parte, aborda-se a geometria no ensino básico, a importância desta no currículo do ensino básico, os seus objetivos, a importância do desenvolvimento da visualização e da percepção espacial e a articulação da geometria nos vários ciclos do ensino básico. Aborda-se, também, as diferentes isometrias e simetrias (axial e rotacional), com as suas definições e a sua contextualização no ensino. Finaliza-se, esta parte deste capítulo, com a Geometria *sona*, enquadrando-a no povo que a pratica (povo *Cokwe*) e na respetiva localização geográfica. Por fim, faz-se referência a explorações matemáticas/geométricas e didáticas que o professor pode usar, exibindo assim as suas potencialidades didáticas.

No terceiro capítulo, “Metodologia”, explicitam-se as opções metodológicas adoptadas na investigação em questão e o design da mesma. Carateriza-se os intervenientes (alunos, docente e escola), justificam-se e descrevem-se as técnicas e os instrumentos utilizados para a recolha de dados. Finalmente, é feita a descrição do estudo e o tipo de tratamento a que os dados foram submetidos. Apresenta-se, com detalhe, a sequência didática delineada e implementada que inclui as atividades/tarefas propostas aos alunos e os instrumentos de avaliação das aprendizagens.

O quarto capítulo, “Apresentação e análise dos dados”, como o próprio nome sugere debruça-se sobre os dados recolhidos através de diversos instrumentos, procedendo-se a uma análise pormenorizada e à discussão dos mesmos.

No quinto e último capítulo “Conclusões, implicações e sugestões”, são sintetizadas as principais conclusões retiradas da experiência desenvolvida, discutidas algumas implicações do estudo e apresentadas algumas propostas para investigações futuras. Apresentam-se e discutem-se os principais resultados do estudo, sintetizam-se diversas recomendações que dele decorrem, apresentam-se algumas pistas para investigações futuras e indicam-se as suas principais limitações. Reflete-se sobre a resposta à questão de investigação e sobre a consecução dos objetivos dos estudo. Finalmente, conclui-se este trabalho com uma breve reflexão pessoal sobre o seu desenvolvimento.

Termina-se este trabalho com a bibliografia e anexos.

CAPÍTULO II - REVISÃO DA LITERATURA

Nota Introdutória

Este capítulo pretende apresentar o referencial teórico conceptual que enquadra o estudo, pretendendo-se construir uma perspetiva teórica, desenvolver as principais ideias e conceitos relevantes no tema de investigação, que auxilie na análise dos dados e na sustentação das conclusões, de modo a atingir os objetivos do estudo e por conseguinte, responder às questões de investigação colocadas. Como já referido anteriormente, este capítulo está dividido em três partes:

1. Ensino e aprendizagem da matemática no ensino básico (inclui finalidades do ensino da matemática, aprendizagem da matemática (na perspetiva construtivista), dimensão afetiva da aprendizagem e insucesso escolar);
2. Etnomatemática (etnomatemática e educação intercultural e multicultural);
3. Ensino da Geometria (onde inclui a geometria do ensino básico, as transformações isométricas e as simetrias e a Geometria *Sona*).

Embora se tratem de três partes, abordadas separadamente por uma questão de organização, estas interligam-se e complementam-se. Mais especificamente, temos: na primeira parte - Ensino e aprendizagem da matemática no ensino básico – faz-se referência aos documentos curriculares de matemática do ensino básico, desde a década de 90 até aos dias de hoje. Explora-se, ainda, pela sua relevância na sociedade contemporânea e nos *curriculos escolares*, os conceitos de literacia e competência matemática. Paralelamente, explora-se o protagonismo que o professor assume na gestão desse mesmo currículo, designadamente, na seleção e estruturação das tarefas de ensino e aprendizagem. Pela sua relevância e profundas repercussões escolares e sociais referiremos, de forma resumida, a questão do "Insucesso escolar", nomeadamente em matemática. Na "Dimensão afetiva da educação matemática" falar-se-á das componentes da dimensão afetiva, defendida por vários autores conceituados, explicando o significado de crença, atitude, emoção, motivação, etc., fazendo a distinção entre estas e explicando a sua importância na educação matemática e de que forma estas interferem na aprendizagem. Falar-se-á da "Aprendizagem da matemática na perspetiva construtivista" explicando de que forma se processo a aprendizagem.

Na segunda parte aborda-se a "Etnomatemática", iniciando com a contextualização teórica, seguindo-se o movimento etnomatemático, as aplicações etnomatemáticas, a educação matemática na perspetiva etnomatemática, as dimensões da etnomatemática, em particular, a dimensão educativa, sendo esta a que mais nos interessa. Aborda-se, ainda o conceito de "Educação intercultural e multicultural" apontam-se as principais razões que sustentam o relevo que é dado à educação para a interculturalidade e explana-se a distinção entre educação intercultural e a educação multicultural. Nesse âmbito, por se considerar que a etnomatemática é um recurso incontornável para a educação intercultural, enquadraremos o conceito de etnomatemática e refletiremos sobre o seu valor didático, evidenciando as potencialidades matemáticas e didáticas da chamada geometria *sona*.

Por último, na terceira parte, debruçamo-nos sobre "Ensino da Geometria"- o ensino e aprendizagem da geometria no ensino básico, fazendo referência ao modelo de Van Hiele, falar-se-á do sentido espacial e da sua importância, das orientações nacionais e internacionais para o ensino da geometria, centrando, em particular, a nossa atenção, nas Isometrias do plano (reflexão, translação, reflexão deslizante e rotação) e nos conceitos de simetria axial e rotacional, com as suas definições e propriedades. Focaremos a "Geometria *Sona"*, com a apresentação desta e do povo que a pratica, assim como das suas potencialidades didáticas (potencialidades ao nível da matemática e de uso educacional) e dos desenhos que compõem a referida geometria. Finalizamos com a análise e reconstrução dos elementos matemáticos da tradição *sona* na educação matemática, procurando o potencial matemático desta tradição.

2.1 Ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Básico

2.1.1 As finalidades do ensino da matemática

Segundo Breda *et al.* (2011), a Matemática é inseparável do quotidiano e operações matemáticas simples como contar e medir não respondem às necessidades impostas por uma sociedade que se desenvolveu e ainda se desenvolve com base nesta ciência que lida com objetos e relações abstratas. A matemática sempre acompanhou a evolução humana, progredindo nos métodos, nos processos, nas técnicas e na organização, numa interligação ativa com as suas necessidades. Esta encontra-se presente em todos os ramos científicos e tecnológicos, nos mais variados campos de artes e em quase todas as profissões e setores de atividade. Pelas razões exibidas, exige-se da escola a contribuição com uma formação que permita aos alunos compreender e utilizar a Matemática ao longo do seu percurso escolar e no futuro, na sua vida profissional, pessoal e social.

Assim, o ensino da matemática pode ser justificado por muitas e convincentes razões. Segundo Ponte *et al.* (1993, p. 60):

> *(…) pode-se argumentar que esta disciplina é necessária à vida quotidiana e essencial em muitas actividades profissionais. Pode justificar-se dizendo que a matemática faz parte do património cultural da sociedade, (….) Pode defender-se que ela "ensina a pensar", tornando-nos mais aptos, por exemplo, para pensar de forma abstracta e para fazer raciocínios dedutivos. Pode ainda salientar-se o facto de ela ajudar a desenvolver valores estéticos, nomeadamente a noção do belo. Além de tudo disso, pode dizer-se que trabalhar em matemática constitui, em determinadas circunstâncias, um verdadeiro prazer.*

Segundo estes mesmos autores, as finalidades para ensinar matemática, em qualquer nível de ensino, envolvem diversas dimensões, onde se destacam os aspetos culturais, sociais, formativos e políticos. A valorização e a importância que se dá a cada uma delas têm consequências profundas na elaboração do currículo, no processo de aprendizagem e no papel social desempenhado por esta disciplina.

Vamos, de seguida, analisar a dimensão cultural da matemática, pela relevância que esta assume na investigação que desenvolvemos. Segundo Ponte *et al.* (2007, p. 61), a matemática esteve sempre ligada aos grandes problemas da ciência e da técnica de cada época, estimulando o desenvolvimento de novos conceitos e novas teorias: *O conhecimento matemático tem, assim, carácter histórico e contingente, como qualquer outro domínio do conhecimento humano. O seu conjunto de práticas e de realizações conceptuais está sempre ligado a contextos sociais e históricos concretos, sublinhando a importância da sua dimensão cultural.*

Os mesmos autores afirmam que o ensino de matemática numa perspetiva axiomática e dedutiva, sem apresentar história e sem qualquer relação com a realidade é uma opção cultural, entre outras formas legítimas de encarar esta ciência. Os mesmos referem que, em tempos antigos, a matemática era caraterizada como a ciência do número e da forma, sendo depois encarada como a ciência das estruturas. Atualmente, é vista e concebida por muitos como a ciência dos padrões e das regularidades, sendo a sua evolução permanente.

Ainda segundo os autores do atual Programa de Matemática do Ensino Básico, os alunos, muitas vezes, acreditam que a Matemática é uma ciência exata, pronta, acabada e de alto grau de complexidade, sendo esta leitura marcada pelo processo de exclusão que sofreram durante os anos escolares. Bishop (1999) considera que a matemática que se ensina é desumana, despersonalizada e descontextualizada e refere que para que esta conserve a sua "pureza", eliminam-se todas as referências a valores e outros aspetos relativos à sua dimensão cultural. Este autor defende o ensino individualizado e personalizado e reconhece que, na realidade atual, é complicado trabalhar dessa forma, pois as questões culturais influenciam o processo de leitura das pessoas e a forma como estas compreendem os conceitos emergentes das várias áreas do conhecimento.

Assim, no que diz respeito às dimensões culturais, qualquer desenvolvimento do currículo envolve sempre diversas opções no modo como valoriza (ou não) a perspetiva histórica e as aplicações da matemática, a compreensão do papel da matemática na sociedade, e na forma como relaciona (ou não) a abordagem própria de cada país (e de cada comunidade) com a matemática universal em permanente desenvolvimento pela comunidade de investigação.

No quadro das atuais orientações curriculares portuguesas para a educação matemática básica é dada bastante importância à dimensão cultural da matemática, recomendando-se aos professores que a formação a proporcionar aos alunos deve promover *uma visão adequada da Matemática e da actividade matemática, bem como o reconhecimento do seu contributo para o desenvolvimento científico e tecnológico e da sua importância cultural e social em geral* (Ponte *et al*., 2007, p. 3). Esta perspetiva é consistente com recomendações internacionais que destacam o desenvolvimento da literacia matemática como uma das metas da educação matemática dos jovens até aos 15 anos, ou seja, da escolaridade básica. Com efeito, numa sociedade cada vez mais globalizada, onde a ciência e a tecnologia imperam e as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos é importante e crucial formar os jovens e capacitá-los para tomarem decisões informadas e fundamentadas na sua vida pessoal e na profissional. No quadro do Programme for International Student Assessment (PISA) da OCDE, dirigidos a jovens de 15 anos no final da escolaridade básica, procura-se resposta a três questões: *Os estudantes estão bem preparados para os desafios do futuro*?, O*s estudantes analisam, raciocinam e comunicam de modo efetivo*?, *Os estudantes desenvolveram capacidades para continuar a aprender ao longo da vida*?. A resposta a estas questões passa, no quadro do PISA, pela avaliação do domínio da literacia matemática dos jovens, ou seja, pela avaliação da *capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo* (GAVE-ME, 2004, p. 7). Esta avaliação pressupõe que os alunos sejam confrontados com problemas que remetem para situações/contextos diversificados e reais, nem sempre bem estruturados, cuja resolução implica o uso/aplicação de competências matemáticas de raciocínio, de resolução de problemas, de comunicação, representação, etc. desenvolvidas ao longo da escolaridade e através das suas experiências de vida. O processo fundamental que os alunos aplicam para resolver problemas da vida real é referido, no PISA, como matematização.

A medida da literacia matemática de uma pessoa é determinada através da forma como usa o seu conhecimento matemático e as suas capacidades na resolução de problemas. Os problemas (e a sua solução) podem ocorrer numa variedade de situações ou contextos, dentro dos limites da experiência de cada indivíduo. Neste âmbito, os problemas abordados no PISA conectam com o mundo real de duas formas: em primeiro lugar, os problemas existem em situações que são relevantes para a vida do aluno (as situações são parte do mundo real) e por outro lado, em cada situação, os problemas têm um contexto mais específico (GAVE-ME, 2004). Tem sido reconhecido que, ao lidar com questões que são passíveis de tratamento matemático, a escolha dos métodos e das representações matemáticas estão, muitas vezes, dependentes das situações em que os problemas são apresentados. Neste entendimento, a situação é a parte do mundo do aluno em que as tarefas estão localizadas. Para o PISA, a situação mais próxima é a da vida pessoal do aluno, seguida da sua vida escolar, de trabalho e de lazer, seguida da vida em comunidade local e da sociedade, tal como são encontradas na vida real e as situações científicas são as mais distantes. Definem as quatro situações - tipo que são usadas para as questões que se colocam: vida privada, vida escolar e de lazer, vida pública e científica. O contexto de um item é o seu enquadramento específico dentro de cada situação e contém todos os elementos usados na formulação do problema (GAVE-ME, 2004).

Portanto, a avaliação da literacia matemática dos indivíduos com 15 anos revela a importância da escolaridade básica formar cidadãos informados, reflexivos e consumidores esclarecidos. Com efeito, os cidadãos das sociedades contemporâneas confrontam-se, cada vez mais, com uma quantidade enorme de tarefas que envolvem conceitos quantitativos, espaciais, probabilísticos, etc.. Não só o cidadão é confrontado com a necessidade de ler e interpretar formulários, horários dos comboios, mapas da rede de metropolitanos, efetuar transações monetárias, como também os *media* estão repletos de informação representada de múltiplas formas - figuras, tabelas e gráficos - e relacionada com áreas tão diversificadas como a economia, a meteorologia, a medicina, a energia, a ecologia, etc.. Em todos esses contextos nem sempre o cidadão percepciona a presença e o papel da matemática e, esse é um motivo, que, em nossa opinião, sustenta o relevo educativo que é dado ao desenvolvimento da literacia matemática, tanto nos *curriculos* nacionais e internacionais de matemática como nos organismos internacionais, como a OCDE que promove os estudos PISA.

A resolução de problemas requer que os alunos utilizem as capacidades e as competências que foram adquirindo ao longo da escolaridade e através das suas experiências de vida. No quadro conceptual dos estudos PISA, para um indivíduo ter sucesso na matematização tem de possuir um conjunto de competências matemáticas características que remetem para processos característicos da atividade matemática: pensamento e raciocínio; comunicação; modelação; formulação e resolução de problemas; representação; uso da linguagem e de operações simbólicas, formais e técnicas; uso de auxiliares e de instrumentos (*ibidem*).

Algumas destas competências são destacadas no Programa de Matemática do Ensino Básico com a designação de capacidades transversais, podendo ler-se na introdução a este documento que esta é uma alteração significativa em relação a programas anteriores, especificando-se:

> *o programa assume a necessidade de se indicarem, para além dos temas matemáticos, três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática – que devem merecer uma atenção permanente no ensino, apresentando-as de forma desenvolvida num espaço próprio, com a explicitação de objectivos gerais e específicos de aprendizagem relativos a cada uma dessas capacidades* (Ponte *et al.*, 2007, p. 1).

Refira-se, ainda, que são também valorizadas *outras capacidades como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática, contempladas quer no trabalho com as capacidades transversais apresentadas neste ponto, quer no trabalho com os diversos temas matemáticos* (*ibidem*, p. 7). Neste contexto, pode-se afirmar que, sendo explicitado que o ensino da matemática ao longo da escolaridade básica deve ter como uma das suas duas finalidades *Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados*, os documentos curriculares portugueses se orientam para o desenvolvimento da literacia matemática (*ibidem*, p. 3).

Acresce, ainda, salientar que os estudos PISA destacam o contributo da componente atitudinal e afetiva, na aquisição de literacia matemática.

> *As atitudes e as emoções relacionadas com a matemática, tais como a autoconfiança, a curiosidade, os sentimentos de interesse e de relevância, e a vontade de realizar ou de compreender, não são componentes da definição de literacia matemática, mas, no entanto, contribuem para ela de uma forma importante* (GAVE-ME, 2004, p. 8).

Esta componente está, igualmente, bem presente nas atuais orientações curriculares para o Ensino Básico onde se assume o desenvolvimento de *atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência* como uma das duas grandes finalidades do ensino da disciplina nesta etapa da vida escolar dos alunos (Ponte *et al*., 2007, p. 3).

2.1.2 Competência e competência matemática

Na literatura encontramos várias definições sobre a noção de competência. Perrenoud (1999, p. 7) define competência como *uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação apoiando-se em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles*. Este autor reforça ainda que a competência é uma mais-valia acrescentada aos saberes, demonstrando a capacidade de os utilizar para resolver problemas, construindo estratégias, tomando decisões, atuando no sentido mais vasto da expressão. Roldão (2009, citada em Aguieiras, 2011, p. 25) refere que Perrenoud distingue competência *pela capacidade que o sujeito manifesta de mobilizar/orzanizar adequadamente, em situação, a constelação de saberes de vários tipos, predisposições, e capacidade de análise de que dispõe e que a situação requer. A competência não é a aplicação de um saber, a competência é, neste entendimento, um saber em uso, activo e actuante*. A mesma autora refere que a competência *significa sermos capazes de usar adequadamente os conhecimentos - para aplicar, para analisar, para interpretar, para pensar, para agir - nesses diferentes domínios do saber e, consequentemente, na vida social, pessoal e profissional* (*ibidem*, 2009, p. 19, citado em Aguieira, 2011, p. 25). Segundo Aguieiras (2011), verifica-se que a competência envolve sempre três elementos comuns- os saberes, as capacidades e as situações - problema. Um aluno é competente quando for capaz de resolver problemas em contexto, interligando saberes e processos anteriormente adquiridos. Sendo assim, para que uma pessoa seja competente deve, ao nível dos saberes, possuir conhecimentos que lhes permitam dominar o vocabulário específico, situar no tempo, localizar no espaço, conhecer personagens e acontecimentos históricos; ao nível do saber - fazer, deve ser capaz de analisar um documento, exprimir-se de forma oral e por escrito, tomar notas, documentar-se, manusear estatísticas e construir gráficos; ao nível do saber - ser, deve aplicar-se nas aulas e fora delas e sobretudo, respeitar os outros para desenvolver as capacidades, e por fim, deve saber resolver problemas de extensão variável em contexto, interligando saberes e capacidades, o que corresponde à resolução de situações - problema (*ibidem*).

Em Portugal, o ME definiu o perfil de competências a desenvolver ao longo do ensino básico (Decreto-lei 6/2001) e estas competências e sugestões educativas deram origem a um documento de referência a nível nacional em 2001, denominado por *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais*, com o intuito de provocar uma transformação gradual no desenvolvimento do currículo, ou seja, torná-lo mais flexível e adequado a cada contexto. No referido documento, o conceito de competência surge como uma noção *que integra conhecimentos, capacidades e atitudes e que pode ser entendida como saber em acção ou em uso*. (ME-DEB, 2001, p. 9), tratando-se, assim, de *promover o desenvolvimento integrado de capacidades e atitudes que viabilizam a utilização dos conhecimentos em situações diversas* mais ou menos familiares ao aluno (ME-DEB, 2001, p. 9). Ainda para Aguieiras (2011), tendo como referência a Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986, este documento determina o perfil de competências essenciais no final dos vários níveis de ensino, sugerindo vários tipos de competências gerais comuns a todas as áreas disciplinares e um conjunto de competências específicas a desenvolver em cada uma das áreas disciplinares. Pretendia-se, sobretudo, passar de um tipo de ensino baseado em programas por disciplinas e por anos de escolaridade, para um que considere o ensino básico como um todo e promova o desenvolvimento de competências e experiências por áreas disciplinares e por ciclo. Neste documento são enunciadas dez competências gerais que reúnem os diferentes saberes (culturais, científicos e tecnológicos), a linguagem, a comunicação, os métodos de trabalho, a resolução de problemas, a tomada de decisões, a autonomia, a responsabilidade, a criatividade e a cooperação.

Com esta reorganização curricular no ensino básico, a verdadeira funcionalidade na escola consiste em, mais do que memorizar saberes, gerar e estimular atividades que criem bases para a mobilização de conhecimentos e capacidades, de maneira pertinente, de forma a tornar, por sua vez, mais complexa e exigente, implicando uma formação e renovação permanente, a qual nem sempre está acessível, pois as necessárias mudanças na formação dos docentes e nas condições de trabalho, a fim de responderem às novas circunstâncias e exigências profissionais, geralmente não acompanham a evolução dos normativos curriculares.

Aguieiras (2011) refere que todos estes requisitos necessários para ser competente estão em sintonia com a visão prospetiva do relatório *Educação: Um tesouro a Descobrir*, orientado por Jacques Delors e publicado pela UNESCO em 1996, onde a educação para este século assenta em quatro pilares do conhecimento fundamentais: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a ser e aprender a viver juntos. Remata, dizendo que é através destas quatro aprendizagens fundamentais que o indivíduo se torna competente e consegue ultrapassar obstáculos, situações problemas, dificuldades, enigmas individuais ou coletivos, que aparecem no quotidiano, mobilizando saberes e capacidades.

Matos (2011) refere que as mais recentes investigações em educação matemática dão grande relevo à concepção de *currículos* orientados para o desenvolvimento de competências, dando prioridade a conteúdos que possam ser abordados em situações complexas. Encara-se a noção de competência, enquanto princípio de organização curricular, pela atribuição do “valor em uso” de cada conhecimento. A definição adoptada é a do currículo nacional de matemática, definida acima. Esta autora refere que, deste modo, a noção de competência está, de forma profunda, relacionada com o desenvolvimento de algum grau de autonomia em relação ao uso do saber. A noção de competência matemática envolve o conceito de competência e aplica-se em particular à área da matemática. Este conceito está intimamente relacionado com o conceito de literacia matemática, adoptado no PISA.

No que diz respeito à competência matemática que todos os alunos devem desenvolver ao longo da escolaridade básica, o currículo nacional do ensino básico (ME-DEB, 2001) defende que ser-se matematicamente competente envolve, numa perspetiva integradora, um conjunto de atitudes, de capacidades e conhecimentos relativos à matemática. Para Serrazina & Oliveira (2005), esta noção de competência em matemática, equaciona oito aspetos constituintes que todos devem desenvolver no seu percurso ao longo do ensino básico e pressupõe o reconhecimento de que esta disciplina é fortemente interrelacionada, que os tópicos se sobrepõem e integram, no desenvolvimento das experiências de aprendizagens transversais e mediadoras das aprendizagens matemáticas. Assim, o conceito de *ser matematicamente competente* inclui termos como *predisposição ou a capacidade, a tendência, defendendo-se que estes constituem elementos essenciais de uma cultura matemática, a desenvolver por todos os alunos* (ME-DEB, 2001, p. 57). Esta caracterização possibilita percepcionar a abrangência deste conceito, uma vez que, por um lado, engloba aspectos relacionados com a matemática e, por outro lado, diz também respeito a dimensões que se prendem com a comunicação e autoconfiança para realizar atividades intelectuais, que são transversais a outras áreas do conhecimento.

2.1.3 Breve descrição das orientações curriculares do panorama nacional

Segue uma breve descrição das orientações curriculares nacionais, desde a década de 90 até hoje: inicia-se com a descrição do Programa de Matemática do 3.º ciclo (ME- DGEBS, 1991), ainda em vigor na Escola no ano letivo em que desenvolvemos a investigação, seguida do documento *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001) e, por fim, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em dezembro de 2007 (Ponte *et al*., 2007).

O novo programa de matemática (Ponte *et al*., 2007) começou a ser implementado na escola onde a docente- investigadora desenvolveu a sua investigação no ano 2010/11 no 7.º ano de escolaridade, no ano 2011/12 no 8.º ano e no ano letivo 2012/13 no 9.º ano de escolaridade, pelo que a docente regeu-se pelas orientações curriculares do programa de matemática do ensino básico de 1991. Contudo, teve em atenção as orientações do novo programa de matemática (Ponte *et al*., 2007).

Programa de matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico de 1991 (**ME- DGEBS, 1991**)

Este documento está dividido em dois volumes: o primeiro volume (geral) denomina-se *Organização Curricular e Programas* e o segundo volume (específico) designado por *Programa de Matemática; Plano de organização do Ensino Aprendizagem*. No volume I encontra-se uma introdução, a organização curricular do ensino básico onde estão definidos os objetivos, a estrutura curricular, os princípios orientadores da ação pedagógica e os programas de cada disciplina. O programa de matemática está dividido em seis sessões: introdução, onde estão definidos os temas a tratar ao longo dos três ciclos (*Geometria, Números e Cálculo, Estatística e Funções*); as finalidades da disciplina de matemática no ensino básico; os objetivos gerais, estes divididos em valores, atitudes, capacidades e aptidões e conhecimentos; os conteúdos para cada tema; as orientações metodológicas gerais (resolução de problemas, raciocínio, comunicação, história da matemática, papel do professor e recursos) e a avaliação, onde se apresentam sugestões de instrumentos para recolha de dados e onde é dada ênfase à avaliação formativa. Neste mesmo volume clarifica-se uma preocupação relativamente à unidade e à coerência, sendo mesmo apontado como inovador o seu projeto pedagógico global. As dimensões educativas contempladas nesse projeto estão divididas em três dimensões: a formação pessoal, nas suas vertentes individual e social; a aquisição de saberes/capacidades e a habilitação para o exercício da cidadania responsável (ME-DGEBS, 1991). Este projeto contempla ainda *uma pedagogia de desenvolvimento integrado em que a promoção de atitudes e valores assume papel nuclear e em que o domínio de aptidões e capacidades sobreleva e, simultaneamente, condiciona a aquisição de conhecimentos* (ME- DGEBS, 1991, p. 9). Relativamente ao volume II, listam-se os objetivos gerais, as indicações gerais sobre a gestão do programa, surgindo os conteúdos agrupados em unidades e estas distribuídas pelos anos de escolaridade. São, ainda, expressos os objetivos específicos, as sugestões metodológicas e o peso relativo ao número de horas para cada unidade. Os programas são apresentados como instrumentos reguladores do processo ensino -aprendizagem e são sugeridos, de forma intencional, com um elevado nível de generalidade, com o objetivo de deixar em aberto um campo propício ao desenvolvimento curricular.

Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME- DEB, 2001)

No ano de 2001 aparece o documento *Currículo Nacional do Ensino Básico- Competências Essenciais*, com uma seção para a disciplina de matemática e apresentando um conjunto de competências essenciais (salienta os saberes fundamentais) para o ensino básico e essas competências são apresentadas em dois domínios: competências de caracter geral e competências específicas respeitantes a cada disciplina, no conjunto dos três ciclos e em cada um dos ciclos. Em cada uma das disciplinas procurou-se salientar os saberes que permitem o desenvolvimento de uma aprendizagem com compreensão.

O termo competência aparece assim, pela primeira vez, referido em documentos oficiais, tendo havido necessidade de o caraterizar, definindo melhor o que se pretendia para o ensino básico. Neste documento, competência integra conhecimentos, capacidades e atitudes, entendendo-se como *saber em acção ou em uso* (*ibidem*, p. 9), contrariando a lógica da pedagogia por objetivos, onde os domínios estão separados (Santos, 2003). Ainda segundo esta autora, esta visão considera o aluno como um todo, onde os elementos cognitivos não estão sozinhos no trabalho desenvolvido por este. Em termos nacionais, este é o primeiro documento oficial que não está organizado por anos de escolaridade, mas por ciclos, promovendo assim uma articulação efetiva entre os mesmos. No que diz respeito à matemática, a competência visa promover a mobilização de saberes para compreender a realidade e para abordar situações e problemas. Neste documento estão definidas duas finalidades para o ensino da matemática no ensino básico: *1. proporcionar aos alunos um contato com as ideias e métodos fundamentais da matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza; 2. desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocionar e comunicar* (ME- DEB, 2001, p. 58).

Este documento refere que estas finalidades serão atingidas se o aluno experimentar aprendizagens adequadas e significativas. Assim, o ambiente de sala de aula não se coaduna com tarefas dirigidas ao treino e repetição, que por norma são pobres e pouco desafiantes do ponto de vista intelectual (Santos, 2003). A organização deste documento é diferente da do programa de 1991, não sendo a sua intenção substitui-lo, mas iniciar uma revisão curricular que foi completada, mais tarde, com novos programas. Como já referido, organiza-se por ciclos e não por anos e apresenta um conjunto de competências que são transversais a todos os ciclos. Encontra-se, igualmente, um conjunto de experiências que devem ser proporcionadas a todos os alunos e, desta forma, o professor é confrontado com o desafio de *promover o desenvolvimento integrado de capacidades e atitudes que viabilizam a utilização dos conhecimentos em situações diversas, mais familiares ou menos familiares aos alunos* (ME- DEB, 2001, p. 9).

No que respeita à matemática no currículo do ensino básico, o documento em análise aponta, como já referido anteriormente, competências essenciais a desenvolver e experiências de aprendizagem a vivenciar por todos os alunos em cada ciclo de escolaridade. As competências matemáticas referem aspetos como a predisposição para raciocinar matematicamente; a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem oral, adequada e não ambígua; a aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado; gosto e confiança pessoal em desenvolver atividades intelectuais e tendência para procurar a estrutura abstrata presente em situações do mundo real. Refere-se ainda que, ao longo da Educação Básica, todos os alunos devem ter oportunidades de usufruir diferentes experiências de aprendizagem, considerando aspetos tais como: a utilização de recursos adequados, o contacto com aspetos da história da matemática, do desenvolvimento e da utilização da matemática. É atribuída a esta área do saber uma componente essencial, valorizando-se a promoção da compreensão de relações entre ideias matemáticas, entre diferentes temas de matemática como no interior de cada tema, sem esquecer ainda as relações entre ideias matemáticas e outras áreas de aprendizagem, nomeadamente, a música, as artes visuais e as tecnológicas.

No que concerne à competência matemática a promover ao longo da educação básica, a ênfase deve ser colocada na *utilização da matemática para analisar e resolver problemas, para raciocinar e comunicar* (*ibidem*, p. 58) (o que consequentemente implica auto-confiança e motivação pessoal do aluno para o fazer) e não adquirir conhecimentos isolados nem dominar regras e técnicas de cálculo. Pretende-se o desenvolvimento integrado de conhecimentos, de capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação e de atitudes favoráveis à atividade matemática. Neste processo de renovação curricular do ensino básico sublinha-se, ainda, dada a sua importância, o uso simultâneo de conhecimentos matemáticos com outros tipos de conhecimentos, ao lidar com várias situações da realidade, onde a ligação e a articulação de saberes científicos possibilitam aprendizagens significativas (ME-DEB, 2001). Conforme refere ME-DEB (2001, p. 57) *ser matematicamente competente envolve, hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática*. No que concerne ao domínio da geometria, especifica-se que a competência matemática que todos devem desenvolver no 3.º ciclo, mais concretamente ao nível das isometrias inclui predisposição para identificar transformações geométricas e ter sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e com a técnica.

Em 23 de dezembro de 2011, o Despacho n.º 17169/2011 veio a por fim à aplicação do documento *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001) assumido desde 2001/02 como referência central para o desenvolvimento do currículo e nos documentos orientadores do Ensino Básico.

Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) (Ponte *et al*., 2007)

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007) pretende ser um reajustamento do programa anterior, introduzindo alterações significativas, iniciando por apresentar as finalidades e objetivos gerais para o ensino da Matemática. Nele se definem as principais metas, comuns aos três ciclos, numa perspetiva de interligar e de dar continuidade ao longo do ensino básico. O processo ensino - aprendizagem desenvolve-se em torno de quatro temas fundamentais - *Números e Operações*; *Pensamento algébrico*; *Pensamento geométrico* e *Trabalho com dados*.

Como grande novidade em relação aos programas anteriores destaca *três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática - Resolução de problemas; Raciocínio matemático e Comunicação matemática - que devem merecer uma atenção permanente no ensino, apresentando-as de forma desenvolvida num espaço próprio, com a explicitação de objectivos gerais e específicos de aprendizagem relativos a cada uma dessas capacidades* (Ponte *et al*., 2007, p. 1). Paralelamente, é também enfatizada a necessidade de desenvolver nos alunos outras capacidades matemáticas, como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática. No corpo do Programa, tais capacidades são contempladas no âmbito das capacidades transversais e no trabalho com os diversos temas matemáticos (Ponte *et al*., 2007, p. 9).

Neste Programa são apresentadas duas finalidades fundamentais do ensino da matemática comuns ao percurso do ensino básico que são: *Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados* e *Desenvolver atitudes positivas face à matemática e a capacidade de apreciar esta ciência* (*ibidem*).

A primeira finalidade pretende fomentar a compreensão dos conceitos matemáticos e das relações entre eles, bem como a capacidade para os mobilizar e utilizar na análise, na interpretação e na resolução de problemas em contextos diversos. De acordo com os autores do Programa, esta finalidade deve ser, também, entendida para incluir o desenvolvimento da *capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos* (Ponte *et al*., 2007, p. 3) e da *capacidade de comunicar em matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega* (*ibidem*, id). No que concerne à segunda finalidade, esta está orientada para o fomento do gosto pela matemática e para a autonomia do aluno, bem como para a compreensão da matemática como uma atividade humana. Deste modo, está em causa aponta o *(...) desenvolvimento nos alunos de autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização* e *(....) compreensão da matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua história* e *(...) capacidade de reconhecer e valorizar o papel da matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico (...*) (*ibidem*, p. 3).

Além das finalidades para o ensino da matemática, o Programa apresenta um conjunto de objetivos gerais, formulados em termos de resultados que são esperados dos alunos, mas de forma mais específica. Estes objetivos gerais contemplam, no seu conjunto, o desenvolvimento de conhecimentos, de capacidades e de atitudes mas, ao contrário dos programas de 1991, estes não são apresentados em categorias separadas, dado que se considera que deste modo se favorece uma visão integradora destes três domínios. Assim, segundo Ponte *et al*. (2007), os objetivos gerais procuram tornar claro o significado e o alcance das finalidades enunciadas, procurando explicar o que se espera que os alunos aprendam, dando valor às dimensões dessa aprendizagem relacionadas com a representação, a comunicação e o raciocínio matemático, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos.

Este mesmo documento destaca que os objetivos gerais formulados para o ensino da disciplina ao longo dos três ciclos da escolaridade básica se interligam uns com os outros de forma profunda, reforçando, ao mesmo tempo, que a aprendizagem da matemática deve ser feita com compreensão, isto é, assente no saber porquê e não apenas no saber e saber - fazer. Por exemplo, se o conhecimento de fatos matemáticos básicos é uma condição para a aquisição de conhecimentos matemáticos, é através da compreensão que os alunos conseguem estabelecer conexões entre eles (*ibidem*). O fomento da capacidade de comunicação favorece o conhecimento de fatos básicos e a sua compreensão, assim como favorece o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de resolução de problemas, mas também o desenvolvimento destas capacidades, por parte do aluno, favorece o desenvolvimento da capacidade de comunicação (*ibidem*).

No que concerne aos temas matemáticos destaca-se a indicação explicita de que a Álgebra embora não apareça como conteúdo programático do 1.º ciclo, as ideias e o pensamento algébrico estão presentes no 1.º ciclo no trabalho com as sequências numéricas, padrões e regularidades. Por outro lado, em cada ciclo, aquando a introdução de cada tema matemático é apresentada a articulação com o programa do ciclo anterior (*ibidem*).

Relativamente às orientações metodológicas gerais é assumido neste Programa que *a aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor* (*ibidem,* p. 8), pelo que se releva a necessidade e a importância de o professor, ao mesmo tempo que diversifica a natureza das tarefas de ensino e aprendizagem, transmitir aos alunos o que se espera da sua atividade e apoiá-los na sua realização. Nesse âmbito, reveste-se de particular importância:

- *Prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas;*
- *Dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas;*
- *Promover a discussão oral na aula de modo a que os alunos confrontem as suas estratégias com as dos seus colegas, na resolução de problemas, identificando diversos raciocínios efectuados;*
- *Propor situações que envolvam contextos matemáticos e não matemáticos, incluindo outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos* (Ponte *et al*., 2007, pp. 8-9).

Outro aspeto referido é o da resolução de problemas como metodologia para se chegar a diversos conhecimentos e para desenvolver capacidades. Para tal, o docente, deve dar tempo aos alunos para realizarem as tarefas de cariz exploratório e investigativo, de forma a que estes possam elaborar estratégias mais eficazes e descrever com rigor o seu processo de pensamento (*ibidem*).

As normas profissionais para o ensino da Matemática (NTCM, 1994) referem que a aprendizagem, por parte dos alunos, desta disciplina, depende do ambiente da aula, do tipo de atividade desenvolvida, do seu envolvimento na atividade e do discurso em que participam, ou seja, o que os alunos aprendem está intimamente relacionado com a forma como aprendem. A qualidade e a extensão das aprendizagens feitas pelos alunos dependem de vários factores sendo que o tipo de atividade apresentada e proposta aos alunos é uma das mais importantes.

O NPMEB[1] pretende, ainda, que o discente tenha um papel mais ativo na sua própria construção do conhecimento, sendo que ao docente cabe proporcionar tarefas interessantes que cumpram os objetivos que se propõe atingir. Segundo estes autores, a dinâmica de sala de aula deve seguir uma sequência bem definida e bem planificada, onde o docente pode iniciar por apresentar a tarefa, assegurando-se que todos os alunos a interpretam de forma correta. Seguidamente, os discentes desenvolvem o seu trabalho em torno da tarefa, em pares ou em pequenos grupos, seguindo-se a apresentação do trabalho dos alunos, num ambiente de discussão e com argumentação, sendo este momento bastante importante. Por fim, a aula termina com uma síntese das principais ideias aprendidas, realizadas pelo professor e pelos alunos, em conjunto (*ibidem*). Para que esta forma de trabalho alcance os objetivos pretendidos é, igualmente, necessário que as tarefas propostas sejam selecionadas segundo alguns pressupostos: o docente tem de olhar para as tarefas como um todo dentro de uma unidade, ou seja, não interessa apenas selecionar uma tarefa interessante, mas uma cadeia de tarefas diversificada e adequada ao nível da complexidade, ao nível do desafio e do contexto matemático ou extra-matemático (*ibidem*). Dado que as tarefas matemáticas propostas aos alunos, influenciam a sua aprendizagem, estas devem: 1) apelar à inteligência destes; 2) fomentar a compreensão e aptidão matemática; 3) estimular a estabelecer conexões; 4) apelar a formular e a resolver problemas e o raciocínio matemático; 5) promover a comunicação matemática; 6) exibir que a matemática se trata de uma atividade humana permanente; 7) ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos e 8) promover o fomento da predisposição de todos os alunos para fazerem matemática (NCTM, 1994).

Por outro lado, este Programa acentua o valor do trabalho em grupo que, também, pode ser particularmente produtivo na resolução de problemas ou na realização de investigações matemáticas. O trabalho coletivo em turma é, igualmente, muito importante para proporcionar momentos de partilha e discussão, bem como para a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas. Para tal, o docente deve criar condições para uma efetiva participação de todos os alunos nestes momentos de trabalho (*ibidem*).

[1] Leia-se Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Relativamente à avaliação das aprendizagens, momento fundamental da gestão do currículo, esta fornece ao docente informações importantes e substanciais do estado em que se encontram as aprendizagens do aluno e como gerir o processo ensino - aprendizagem. Segundo Ponte *et al*. (2007, pp. 11-12), a avaliação deve informar o docente sobre os progressos dos seus alunos, ajudando-o a reorientar as sua ação didática, a determinar as atividades a aplicar com toda a turma e aluno a aluno e, portanto, *a tomar decisões ao nível da gestão do programa, sempre na perspectiva de uma melhoria da aprendizagem*. A avaliação formativa deve ser feita de forma contínua e permanente e serve para identificar o que o aluno sabe e o que não sabe, tendo o objetivo de melhorar a sua aprendizagem, mas sempre valorizando o que ele sabe e o que é capaz de fazer. Assim, permite que o docente recolha informações para assim avaliar o desempenho dos seus alunos e ajustar a sua prática de ensino (*ibidem*). A avaliação sumativa destina-se a julgar sobre as aprendizagens dos alunos, tem o seu lugar no fim de um período letivo ou no final do ano e esse julgamento pode traduzir-se numa classificação, de cariz qualitativo ou numérico, sendo que avaliar e classificar são ações muito diferentes (*ibidem*).

A totalidade da planificação do docente, segundo Ponte *et al*. (2007), deve ter em conta os objetivos gerais definidos para este nível de escolaridade e as aprendizagens adquiridas anteriormente pelos alunos no ano (ou conhecimentos), a relação com as outras disciplinas ou com áreas disciplinares, o fomento da autonomia e do sentido de responsabilidade e de cooperação. Esta deve contemplar vários momentos de trabalho e utilizar diferentes tipos de tarefas e momentos de reflexão, momentos de discussão e de análise crítica envolvendo os alunos, dado que estes aprendem, não unicamente a partir das atividades que realizam, mas sobretudo, da reflexão que efetuam sobre essas atividades (*ibidem*).

Em suma, o NPMEB (Ponte *et al*., 2007) partiu dos programas anteriores mas introduziu alterações completamente novas que procuram dar maior coerência entre os referidos programas. Houve, igualmente, por parte dos autores uma *preocupação em fornecer uma visão mais completa, global e integradora do que se pretende que seja o ensino da matemática no ensino básico* (Cabrita *et al.*, 2009). O NPMEB salienta que o conjunto de docentes da escola ou do agrupamento deve interpretar e desenvolver o currículo, tendo em conta as finalidades enunciadas para o ensino de matemática associadas a um conjunto de objetivos gerais que contemplam, no seu conjunto, também um conjunto de conhecimentos, capacidades e atitudes mas integradas num todo e não em categorias separadas como se apresentava no programa de 1991. Desta forma considera-se que, se favorece uma concepção mais sistémica dos três domínios referidos anteriormente - conhecimentos, capacidades e atitudes. Por outro lado, os *professores devem, igualmente, ter em conta, no processo de gestão curricular, as indicações metodológicas gerais, as características dos seus alunos, os recursos existentes, as condições da escola e o contexto social e escolar, quando* *planificam ao nível macro e micro tal como previsto no currículo nacional* (Ponte *et al*., 2007, p. 11).

Centrando agora a atenção na Geometria e no seu ensino, são apontados no Programa os seguintes objetivos gerais de aprendizagem (Ponte *et al*., 2007, p. 51):

> *desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar; compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações das figuras geométricas no plano e no espaço; compreender e ser capaz de utilizar as relações de congruência e semelhança de triângulos; desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças; ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos.*

2.1.4 O ensino - aprendizagem da matemática na perspetiva construtivista

Conhecer e compreender a maneira como os alunos aprendem é crucial para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, contribuindo de forma significativa para uma diversidade de aspetos ligados à prática docente. Identificam-se, nesta parte, diferentes perspetivas sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática, em particular, das características da aula de matemática. Assim, passa-se a caraterizar uma das perspetivas de ensino mais apresentada e evidenciada na literatura - o construtivismo. Descreve-se, de modo sucinto, as ideias orientadoras da posição de Piaget relativamente à teoria da aprendizagem e evidenciam-se as implicações pedagógicas que decorrem da posição de Piaget.

Miranda (2007, citada em Caldas, 2011, p. 64) afirma que é preciso reconhecer que:

> *a aprendizagem é um processo re(construtivo), cumulativo, autorregulado, intencional, situado e colaborativo. A aprendizagem como processo re(construtivo) traduz o reconhecimento de que o aluno constrói novo conhecimento com base no anterior, para tal é necessário empenho e esforço na realização das tarefas, na criação de situações, problemas e actividades que conduzam os alunos a níveis superiores de conhecimento sem que haja imposição por parte do professor, pois só assim se dá uma aprendizagem efectiva. A aprendizagem cumulativa reconhece que há acumulação do conhecimento e todas as áreas disciplinares necessitam de pré-requisitos, nomeadamente a matemática em que as novas aprendizagens são suportadas nas anteriormente apreendidas. No que refere à aprendizagem autorregulada importa sobretudo que os professores apoiem os alunos no desenvolvimento de estratégias de aprendizagem visando a aquisição de hábitos de técnicas de trabalho de forma ao desenvolvimento progressivo da autonomia do sujeito aprendente.*

Como Vilela (2008) refere, Piaget revelou muito interesse pelo ensino e pela prática pedagógica, como meio de formar e construir conhecimentos, criticando, de forma severa, a escola tradicional baseada na transmissão oral de conhecimentos e na ideia de criança como um ser passivo e uma tábua rasa onde se pode “carimbar“ os conhecimentos selecionados pelo docente. Piaget não concordava com este tipo de ensino, mesmo encontrando alguns aspectos positivos, como os relacionados com os hábitos de repetição que se efetuam, próprios da atividade assimilativa e que poderiam proporcionar alguma acomodação (*ibidem*). Piaget defendeu que o ensino deve formar o raciocínio, conduzir à compreensão e não recorrer à memorização, desenvolver o espírito criativo e não repetitivo. Neste perspetiva, o docente deve criar situações que levem o aluno a encontrar a solução certa, de acordo com o seu nível psicogenético - seja através de trabalhos práticos, realizados sozinho ou em grupo, dialogando com os outros alunos ou com o docente (*ibidem*). Assim, como refere Morgado (1986, citado em Vilela, 2008), Piaget defendeu a importância de métodos que conduza o aluno a descobrir as soluções de situação proporcionadoras de experimentação, onde este refletisse sobre o tema e que fosse responsabilizado pelas hipóteses que defendesse. A motivação viria do prazer proporcionado pela tarefa e não de um esforço ou de motivação externa. Por fim, Morgado (1986, p. 90, citado em Vilela, 2008) afirma que:

> *(...) a construção de novos conhecimentos exigiria, então, manipulação directa dos materiais, cooperação social, trabalho de grupo e inter-ajuda, na tentativa de promover o desenvolvimento da autonomia intelectual, social e moral, necessário à formação de um adulto criativo, altruísta e adaptado. O professor seria uma peça fundamental na perspectiva de uma pedagogia piagetiana, uma vez que lhe cabe a tarefa de criar os programas adaptados ao nível operatório dos seus alunos, bem como encontrar métodos ao nível operatório dos seus alunos, bem como encontrar métodos de avaliação flexíveis que procurem analisar o desenvolvimento intelectual da criança.*

Segundo Rodrigues (2008), a teoria de Piaget contribuiu, de forma muito acentuada, para compreender como se desenvolve a inteligência do ser humano, ou seja, como se passa de um estado de um conhecimento simples para um estado de conhecimento mais complexo. Esta evolução resulta da forma como o indivíduo interage com o seu ambiente, ou seja, Piaget concebe a inteligência como parte da adaptação biológica que se desenvolve em torno de dois processos - assimilação e acomodação. Para Piaget, existe um paralelismo entre o funcionamento psicológico e o biológico que permite considerar os mecanismos referidos anteriormente como invariantes funcionais e que em conjunto definem a adaptação do ser humano ao meio físico e social (*ibidem*). A assimilação é o processo pelo qual a criança incorpora a nova informação ou experiência nas estruturas prévias. Tal processo permite integrar o que de novo se apresenta à criança, num conjunto de conceitos já existentes e aos quais se aplica já uma conduta anterior (*ibidem*). A acomodação é o processo que leva a criança a mudar a própria estrutura existente para se adequar às novas experiências. A equilibração (organização da ação), outro conceito desenvolvido por Piaget, é um processo de autorregulação que revela a contribuição do sujeito, pois é o equilíbrio existente entre a assimilação e a acomodação que permite a interação entre o sujeito e o meio, condição de todo o funcionamento biológico e intelectual (*ibidem*).

Segundo Barbosa (2009), o ensino associado à perspetiva construtivista considera que o discente dever ter uma participação ativa na construção e elaboração do seu próprio conhecimento, contrariamente à memorização e reprodução de factos e de procedimentos transmitidos, como acontece no modelo de ensino tradicional. Contudo, isto não significa que o papel do docente seja desvalorizado no processo de ensino - aprendizagem, mas que apenas se altera em relação ao modelo tradicional - este deve ajudar os seus alunos a construir o seu próprio conhecimento, *agindo* *como um mediador da actividade que decorre na sala de aula. Cabe-lhe a tarefa de proporcionar um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos possam formular e testar conjecturas, fazer inferências e tirar conclusões, geralmente através de um trabalho colaborativo* (*ibidem*, p. 17). Ao docente, cabe-lhe o desafio de formular questões pertinentes para os alunos, para desta forma desenvolver e avaliar os conhecimentos destes e construir ou selecionar tarefas matemáticas significativas e variadas. Este deve ter, igualmente, a noção e conhecimentos de como os alunos aprendem esta disciplina, do tipo de conhecimento que possuem e as tarefas mais apropriadas para promover a aprendizagem (*ibidem*). Por fim, *este conhecimentos pode surgir de várias situações, como o estar atento à interacções entre os alunos, formulando questões e comunicando ideias através de discussões de grande grupo. Desta forma, há uma partilha e negociação de significados entre os elementos do contexto educacional* (*ibidem*, p. 17).

As orientações metodológicas, de carácter geral constantes no novo programa de matemática do ensino básico (Ponte *et al*, 2007) refletem a valorização dada à perspetiva construtivista para ensinar matemática e destacam a importância do trabalho realizado pelos alunos que é estruturado pelas tarefas delineadas pelo docente.

2.1.5 A dimensão afetiva na aprendizagem matemática

De seguida, aborda-se e explora-se a influência dos aspetos afetivos no processo educacional, nomeadamente, na aprendizagem matemática.

Crenças, atitudes, componentes da atitude, valores, emoções, sentimentos e motivação

Viana (2004) refere que, na análise da aprendizagem e do desempenho dos alunos em matemática, em geometria ou em qualquer conteúdo escolar, não se deverá apenas considerar os aspetos cognitivos ou metacognitivos[2], mas, também, os de índole afetiva. Chacón (2003, p. 23) afirma que para perceber a importância da relação que se estabelece entre afetos – emoções, atitudes, crenças – e aprendizagem matemática, basta reconhecer que:

> *Ao aprender matemática,* o *estudante recebe estímulos contínuos associados a ela – problemas, actuações do professor, mensagens sociais, etc. – que geram nele uma certa tensão. Diante desses estímulos reage emocionalmente de forma positiva ou negativa. Essa reação está condicionada por suas crenças sobre si mesmo e sobre a matemática. Se o indivíduo depara-se com situações similares repetidamente, produzindo o mesmo tipo de reações afetivas, então a activação da reacção emocional (satisfação, frustração, etc.) pode ser automatizada e se "solidificar" em atitudes. Essas atitudes e emoções influem nas crenças e colaboram para a sua formação*.

2 A metacognição é a atividade mental por meio da qual outros processos mentais se tornam alvo de reflexão. A metacognição refere-se ao conhecimento que se tem sobre os próprios processos cognitivos e produtos ou qualquer coisa relacionados com eles, isto é, a aprendizagem das propriedades relevantes da informação ou dos dados. (Davis, C., Nunes, M. e Nunes, C. (2005). *Metacognição e sucesso escolar: articulando teoria e prática.*

Além dos aspectos da experiência que possam parecer essencialmente de natureza racional, tem que se considerar a dimensão afetiva na construção do conhecimento, pois a emoção e a cognição coexistem num mesmo indivíduo e interferem plenamente na sua vida mental e no seu comportamento (*ibidem*). Como afirma Brito (2002, citado por Viana, 2004), os fatores afetivos e emocionais influenciam a profundidade do entendimento construído assim como a qualidade e a quantidade do material aprendido e mais tarde recordado. Embora não pareça existir dúvida de que as atitudes influenciam nos processos cognitivos que conduzem a aprendizagem de qualquer tipo de conteúdo educacional, referentes a conceitos ou a procedimentos (Coll, 1998, citado por Viana, 2004), ainda são recentes os estudos ligados ao ensino e à avaliação das atitudes dos alunos em relação às disciplinas escolares. Neves & Carvalho (2006, p. 202) referem que a *aprendizagem é facilitada quando o indivíduo trabalha com prazer e quando os seus esforços são coroados de êxito*, significando que o sucesso escolar não depende unicamente dos aspetos intelectuais, nele intervindo também aspetos afetivos. Na opinião destas autoras, a *educação só será eficaz se for tida em conta a formação humana e moral do indivíduo*, pelo que se torna crucial aprender a gerir os comportamentos afetivos no ensino. Usualmente, quando se estabelecem laços emocionais positivos na sala de aula, os alunos revelam interesse, entusiasmo, excitação, espírito de descoberta, empenho e confiança, que contribuem para ampliar o seu campo cognitivo. Simon (1982, citado em Neves & Carvalho, 2006, p. 202) afirma que o termo afecto inclui várias componentes tais como crenças, atitudes, emoções, sentimentos, motivação e atribuição casual.

Brito (1996, citado em Viana, 2004) afirma que, diversas vezes, o termo "atitude" é usado como sinónimo de comportamento, havendo alguma confusão entre atitude e o evento observável. Sendo o comportamento originado a partir da motivação, tem-se que as atitudes são fatores componentes da motivação. As atitudes não podem ser diretamente observadas, mas podem ser inferidas pelas respostas avaliativas[3] observadas (*ibidem*). Para Rokeach (1968, citado em Vale, 2000), atitude é uma organização mental de várias concepções centradas num objeto ou numa situação, que predispõe o indivíduo em relação a um dado objeto de uma maneira preferencial. Legendre (1993, citado em Neves & Carvalho, 2006, p. 203), afirma que atitude é um *estado de espírito (...) uma disposição interior adquirida relativamente a si mesmo ou a todo o elemento do ambiente circundante (...) que incita a uma maneira de estar ou de agir, favorável ou desfavorável*. Deste modo, atitude é uma disposição interior para realizar determinadas tarefas. Para Eagly & Chaiken (1993, citados em Viana, 2004), uma atitude é uma tendência psicológica que pode ser expressa quando um indivíduo avalia alguma coisa, com um certo grau de aprovação (demonstrando ser favorável a ela) ou de desaprovação (demonstrando ser desfavorável a ela). Segundo estes mesmos

3 Respostas avaliativas são aquelas que expressam aprovação ou desaprovação, ser favorável ou não, gostar ou não, aproximar ou evitar, atração ou aversão, ou reações semelhantes.

autores, um indivíduo não tem uma atitude em relação a um objeto até que possa responder de forma avaliativa a esse objeto, seja num base afetiva, cognitiva ou comportamental. Se essa tendência de resposta se estabilizar, então o indivíduo terá formado uma atitude em relação ao objeto. Estes autores concluem, referindo que uma representação mental da atitude pode ser armazenada na memória e assim, pode ser ativada aquando da presença do objeto ou em situações relacionadas com ele (*ibidem*).

Brito (1996, p. 11, citado em Viana, 2004) considera que atitude é uma *disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direcção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor*. Assim, a atitude é aprendida e refere-se a um determinado objeto. Esta apresenta uma caraterística unidimensional e bipolar, isto é, refere-se ao sentimento de prazer ou desprazer que o objeto provoca, podendo este sentimento ter maior ou menor intensidade. A atitude apresenta uma direção e pode assumir um dos dois sentidos: positivo ou negativo. As experiências diretas ou indiretas da pessoa com o objeto influenciam o desenvolvimento de atitudes mais ou menos favoráveis em relação a ele (Viana, 2004). As experiências dos alunos com a matemática apresentadas na escola dizem respeito aos diversos conteúdos aprendidos, à maneira como foram desenvolvidos, aos métodos desenvolvidos pelo professor, aos acontecimentos que ocasionaram satisfação ou desconsolo, às formas de avaliação, aos colegas, aos pais, à dinâmica da sala de aula, à cultura da escola, ou seja a um conjunto de fatores que acabam por ajudar a determinar uma atitude mais positiva ou mais negativa do aluno em relação a essa disciplina (*ibidem*).

Segundo Klausmeier (1977, citado em Viana, 2004), as atitudes aprendidas influenciam o comportamento das pessoas que acabam por se aproximar ou por evitar os pensamentos e as ações em relação ao objeto. Portanto, as atitudes diferem do comportamento na medida em que o comportamento é a manifestação de um estado interno do indivíduo, enquanto as atitudes são componentes desse estado. Por outro lado, um aluno com atitudes positivas em relação à matemática poderá demonstrar um comportamento motivado para resolver problemas, por exemplo. As atitudes podem incluir, por exemplo, gosto pelos jogos, curiosidade pela álgebra ou aborrecimento pela geometria. Um aluno com atitudes negativas em relação à matemática poderá recusar-se a pensar sobre um problema ou até poderá interessar-se em tarefas apenas com o objetivo de receber alguma recompensa (*ibidem*). Brito (2002, citado em Viana, 2004) afirma que as atitudes negativas em relação à matemática pode levar o aluno a ter um comportamento que contempla um insucesso temporário até completa aversão pela matemática. Assim, segundo Eagly & Chaiken (1993, citado em Viana, 2004), as atitudes estão relacionadas com a motivação, representando a componente comportamental das atitudes. Este mesmo autor refere que a atitude apresenta três componentes: afetiva, cognitiva e comportamental, sendo que a componente afetiva de uma atitude, refere-se às emoções de um indivíduo face a um objeto, quando este é entendido como agradável ou como desagradável. A componente cognitiva de uma atitude está ligada às informações, aos conceitos, às ideias que o sujeito tem a respeito do objeto. Essas ideias são frequentemente denominadas de crenças e são entendidas como respostas avaliativas dadas pelo sujeito quando associa o objeto como verdadeiro ou falso, correto ou incorreto; é avaliativa quando pode avaliar o conteúdo como bom ou mau; é prescritiva quando pode defender um certo percurso de ação ou certo estado de existência como desejável ou indesejável (*ibidem*). A componente comportamental da atitude refere-se às manifestações de uma pessoa em relação ao objeto, podendo ser observadas de forma direta e podem ser consideradas as intenções do sujeito em realizar as ações, mesmo que elas não sejam executadas (*ibidem*).

Klausmeier (1977, citado em Viana, 2004) diferencia o significado dos termos gosto, atitudes e valores, usando a estabilidade como critério. De acordo com este autor, o termo gosto está ligado a algo específico, os valores são mais gerais, mais amplos e abarcariam áreas maiores de experiências e as atitudes estão situadas entre os dois conceitos. É possível que uma pessoa varie o seu gosto por determinado objeto, menos frequente é a mudança de atitudes em relação ao mesmo e, bem menos provável, a mudança dos valores da pessoa adulta (*ibidem*). Na literatura existente verifica-se que, múltiplas vezes, o termo crença aparece associado ao termo "concepção". Em geral, as concepções são conjuntos de elementos que contém, invariavelmente, as crenças. Contudo, Ponte (1992) realça a distinção entre concepção e crença, colocando as concepções no campo cognitivo e as crenças no campo metacognitivo: as *concepções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros* (*ibidem*, p. 186). As concepções podem ser como pressupostos conceptuais, que condicionam a forma de abordagem das tarefas, enquanto que as crenças são afirmações pessoais, que cada um possui de acordo com a sua experiência cultural e emocional.

Pajares (1992) afirma que as crenças estão relacionadas com acontecimentos, objetos, ações ou relações que o indivíduo aceita como sendo verdadeiras. Para este autor, a crença tem uma componente afetiva muito forte, daí que, aquilo que se acredita ser verdadeiro tem um grande impacto ao nível das nossas escolhas e do nosso comportamento (*ibidem*). Segundo Neves (2002, citado em Viana, 2004), uma baixa crença de autoeficácia impede o aluno de iniciar a atividade, assim como também o autoconceito ou a autopercepção da competência o podem influenciar na realização das tarefas escolares. As suas próprias experiências de sucesso e de fracasso e dos seus colegas, as avaliações e incentivos verbais ditos pelo professor e os estados fisiológicos percebidos pelo aluno são fatores que influenciam a crença de autoeficácia e, como consequência, a sua motivação na escola.

Neves & Carvalho (2006, p. 203) afirmam que o termo emoção *significa um estado afectivo claramente acessível à consciência com um conteúdo cognitivo preciso de grande intensidade mas de curta duração*. Estes mesmos autores acrescentam que *um sentimento designa um estado afectivo complexo, estável e durável, mas menos intenso que a emoção* e que o *termo sentimento deve ser reservado para a experiência privada de uma emoção, enquanto o termo emoção deve ser usado para designar o conjunto de respostas que constitui uma emoção, muitas das quais são publicamente observáveis*. Por sua vez, a motivação é *uma soma de desejo e de vontade, que impele uma pessoa a realizar uma tarefa ou a visar um objectivo que corresponde a uma necessidade* (Legendre, 1993, citado em Neves & Carvalho, 2006, p. 203).

MacLeod (1992) identificou três conceitos usados nas pesquisas e estudos sobre afetos em educação matemática: crenças, atitudes e emoções**,** tendo-as distinguindo do seguinte modo: a emoção como sendo o mais intenso e menos estável, a crença sendo o mais estável e menos intenso e a atitude como sendo algo intermédio entre a emoção e a crença. Provavelmente, a emoção é o conceito mais fundamental quando se discute afetos pois influencia as crenças, as atitudes e os valores. Bishop (1999) declara que os valores em educação matemática são qualidades afetivas profundas e constituem uma componente crucial do ambiente afetivo na sala de aula pois os docentes expressam sentimentos, crenças e valores sobre a disciplina durante a sua prestação com os alunos na sala de aula. Também Chacón (2003) argumenta que as crenças constituem um esquema conceptual que filtra as novas informações sobre as bases das informações processadas anteriormente, cumprindo a função de organizar a identidade social do indivíduo e permitindo realizar antecipações e juízos acerca da realidade. Segundo o mesmo autor, a emoção é uma reação afetiva, feliz ou infeliz, que se manifesta de diferentes maneiras. Na tentativa de diferenciar emoções de sentimentos, Damásio (1996) afirma que, apesar de alguns sentimentos estarem relacionados com as emoções, existem muitos outros sentimentos que não estão: todas as emoções originam sentimentos mas nem todos os sentimentos provêm de emoções. De acordo com o mesmo autor, um sentimento em relação a um determinado objeto baseia-se na subjetividade da percepção do objeto, da percepção do estado corporal criado pelo objeto e da percepção das modificações de estilo e eficiência do pensamento. Do que foi exposto, pode-se pensar que os sentimentos em relação à matemática são organizados a partir de crenças e experiências dos alunos com a disciplina.

Procurando tornar claro a distinção entre concepções, atitudes e emoções, MacLeod (1992) recorre à noção de estabilidade, de intensidade, de papel da cognição e do tempo que demoram a desenvolver-se. Assim, *as atitudes e as concepções são geralmente mais estáveis que as emoções e* *o nível de intensidade afectiva aumenta das "concepções "frias" acerca da matemática para as atitudes "frias" relacionadas com o gostar ou não da matemática e para as reacções emotivas "quentes" derivadas da frustração de resolver problemas não rotineiros* (MacLeod, 1992, p. 578). Por outro lado, ao contrário das emoções, a natureza das concepções é predominantemente cognitiva. As emoções podem aparecer ou desaparecer muito depressa, ao passo que as concepções se desenvolvem ao longo de um período de tempo considerável. Macleod (1993, p. 579) resume a caracterização anterior do seguinte modo: *podemos pensar nas concepções, atitudes e emoções como representando um crescente nível de envolvimento afectivo, um decrescente nível de envolvimento cognitivo, crescentes níveis de intensidade de resposta e decrescentes níveis de estabilidade de resposta*.

Tipos de motivação

Segundo Balancho & Coelho (1996, p. 17, citado em Oliveira, 2010), a *motivação é algo que provoca ou incita uma conduta que sustém uma atividade progressiva e encaminha essa atividade para um dado sentido. Logo, designa-se por motivação tudo o que desperta, dirige e condiciona a conduta*. Neves & Carvalho (2006) referem que existem dois tipos de motivação: intrínseca e extrínseca. A motivação intrínseca refere-se à motivação que vem do próprio indivíduo, que está sob o seu controlo, tem capacidade para se autorreforçar e o indivíduo procura escolher situações que lhe permitam usar as suas capacidades, ainda que exijam um esforço acrescido. A motivação extrínseca é a que provém do exterior do indivíduo e conduz à execução da tarefa, ou seja, resulta do valor atribuído às recompensas e do reconhecimento social. Dentro do primeiro conceito, pode considerar-se como motivação intrínseca positiva aquela em que o sujeito sente prazer na execução da tarefa, por a considerar gratificante ou por a considerar interessante. Por oposição, a motivação intrínseca negativa, conduz a não executar a tarefa, por conduta de abandono, estando-lhe associada experiências negativas (*ibidem*). Na escola, devem evitar-se situações que eliminem a motivação intrínseca da tarefa (por exemplo, quando o professor refere que se o aluno obtiver classificação positiva no próximo teste, este terá nota positiva no final do período), valorizando-se os aspetos positivos da aprendizagem e tendo em conta os progressos do aluno, nunca os comparando com os de outros colegas. No que toca às emoções, umas são claramente desfavoráveis à aprendizagem e outras são-lhe favoráveis, sendo que o medo e a confusão persistentes, o pressentimento, a resignação, a incerteza prolongada, a falta de confiança (que leva à desistência e ao afastamento) e o aborrecimento situam-se entre as emoções desfavoráveis à aprendizagem (*ibidem*).

Oliveira & Chadwick (2001, citado em Oliveira, 2010), entendem que a motivação acionada por motivos internos como a curiosidade, é auto-regulada e geralmente, sobrevém de interesses, de necessidades e de reações pessoais. A sua fonte de motivação reside na própria pessoa, surgindo de dentro para fora. Por outro lado, a motivação impulsionada por motivos externos, como por exemplo, o reforço positivo através de elogios, é condicionada pelo meio ambiente e por fatores exteriores à própria pessoa. Esta consiste na administração de estímulos, reforços, louvores que são fatores que surgem exteriormente à pessoa para a incentivar a realizar certas ações que esta usualmente não realizaria. Um aluno empenha-se na realização de uma tarefa movido pelo esforço extrínseco, quando esta é entendida como um meio para alcançar uma meta extrínseca. Mas, se o aluno entender o reforço como informação sobre a sua capacidade de realizar a tarefa, aquele irá contribuir para o aumento da competência, da satisfação intrínseca e da probabilidade de se empenhar na tarefa (*ibidem*). Na perspetiva de Oliveira & Chadwick (2001, p. 69, citado em Oliveira, 2010):

> *A motivação intrínseca manifesta-se sempre que a curiosidade e o interesse energizam e dirigem a aprendizagem do aluno. A motivação extrínseca baseia-se numa pequena série de necessidades psicológicas como a auto-eficácia, a curiosidade e a autodeterminação. Esses são os elementos que estimulam o aluno a iniciar uma atividade, persistir nela e a utilizar o feedback. Os alunos que aprendem sob essas circunstâncias obtém maior sucesso. As condutas intrinsecamente motivadas, longe de serem triviais, estimulem o aluno a buscar novidades, enfrentar desafios e, dessa forma, satisfazer as suas necessidades psicológicas.*

O tipo de emoção que o aluno apresenta na execução de uma tarefa depende, na maior parte dos casos, das características da própria tarefa, principalmente do conteúdo da mesma e da estratégia metodológica usada pelo professor para a sua realização. Assim, para que um aluno se sinta motivado para a aprendizagem é necessário que possa atribuir utilidade ao tema que lhe está a ser proposto. A tarefa deve ser tão atrativa e interessante para permitir entrar ativamente num processo de construção de significados (*ibidem*). Para tal, é fundamental a existência de uma distância ótima entre o que o aluno já sabe e o novo conteúdo de aprendizagem, porque se esta distância for excessiva, o aluno desmotivar-se-á pois acredita que não consegue assimilar ou atribuir significado à nova aprendizagem. Se a distância for muito pequena, significa que o aluno já conhece o novo conteúdo e o seu estudo não lhe provocará prazer, podendo mesmo aborrecê- lo, pelo que se produz, igualmente, desmotivação (*ibidem*).

Concluindo, segundo Neves & Carvalho (2006), a relação afetiva dos alunos exterioriza-se através dos seus desempenhos e estabelece-se, sobretudo, pela motivação para aprender, não sendo alheia a relação afetiva entre os alunos e o respetivo docente. Assenta, essencialmente, nas experiências anteriores dos alunos, no contexto familiar, com os colegas da turma e nas vivências de sala de aula. A relação entre as atitudes dos alunos e as suas aprendizagens variam de acordo com o contexto das tarefas propostas, da maneira como o professor orienta essas tarefas, do incentivo dado aos debates e da sua reação às atitudes de cada aluno e aos níveis obtidos por este. Segundo estes autores, a forma de melhorar o envolvimento dos alunos na aprendizagem é introduzir práticas mais apelativas e eficazes, no sentido de mudar as suas concepções, podendo, por exemplo, o trabalho a pares, mediado pelo computador, revelar-se vantajoso, desde que se escolham atividades adaptadas às necessidades dos alunos e se proporcionem um maior envolvimento, através de atividades exploratórias realizadas em grupo, seguidas de discussões alargadas à turma focadas no debate de opiniões (*ibidem*).

Atitudes em relação à matemática e atitudes matemáticas

MacLeod (1992) distingue entre atitudes em relação à matemática e atitudes matemáticas. As atitudes em relação à matemática referem-se à valorização e ao interesse pela disciplina e pela sua aprendizagem. A componente afetiva manifesta-se pelo interesse, satisfação, curiosidade ou pela valorização perante a matemática. As atitudes matemáticas ultrapassam a relação de paixão ou de desprezo pela matemática, referindo-se ao modo/maneira pelo qual o indivíduo utiliza as suas capacidades gerais, tais como, a flexibilidade de pensamento, a abertura mental, o espírito crítico e a objetividade, importantes para o trabalho em matemática. Pode-se considerar que as atitudes em relação à matemática possuem um carater marcadamente afetivo e as atitudes matemáticas um carater mais cognitivo (*ibidem*). A perspetiva em que se coloca o aluno, as suas crenças, as emoções, as atitudes e os valores podem ser um indicador da sua situação de aprendizagem matemática. Por fim, este autor, aponta o sucesso e o fracasso matemático como exercendo grande impacto sobre os alunos que aprendem e utilizam a matemática.

2.1.6 Insucesso escolar em matemática

A matemática é uma ciência antiga que tem vindo a adquirir uma importância crescente na nossa sociedade pela sua presença em quase todas as atividades do dia a dia, em diversas as áreas do saber, sendo a base do desenvolvimento científico e tecnológico de todos os países. Desempenha, por isso, um papel de relevo na formação dos alunos e, consequentemente, nos currículos escolares (Matos, 1991). Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999) referem que a matemática é uma disciplina crucial no sistema de ensino e aprender matemática é um direito básico de todas as pessoas e *uma resposta a necessidades individuais e sociais* (*ibidem*, p. 17). Apesar da importância da matemática para o dia a dia das pessoas, para a vida profissional, para o desenvolvimento das outras ciências, das técnicas e outros ramos de atividade humana, muitas vezes é vista como o principal instrumento de seleção de alunos, sobretudo no acesso ao ensino superior, ou seja, como uma disciplina seletiva e discriminativa.

Como é do conhecimento geral, esta área do conhecimento apresenta níveis de insucesso bastante elevados, devido a inúmeras razões, tais como a falta de motivação para a disciplina, a ausência de pré-requisitos dos alunos, a dificuldades em interpretar e resolver problemas e em raciocinar. O insucesso na matemática é uma realidade incontornável, um problema com que a educação se debate ainda hoje dado esta ser uma das causas de exclusão, muitas vezes de forma irrecuperável e irremediável, para muitos alunos, a nível nacional e mundial. Coelho (2008) refere que os maus resultados obtidos na matemática são fatores do insucesso e do abandono escolar, da orientação para profissões mal renumeradas e não requeridas pelos empregadores e consequentemente para disfunções pessoais e sociais.

Em Portugal, os dados do insucesso nesta disciplina são ostentados através dos resultados nos exames nacionais, nos testes dos alunos, realizados a nível de escola, e que transparecem nas estatísticas realizadas nas escolas no final de cada período para medir o nível e a taxa de insucesso (Ponte, 1994). Também os estudos PISA são indicadores desta realidade. Em 2005, Portugal foi um dos cinco países da OCDE com uma percentagem superior a 25% dos alunos que não possuem pelo menos um nível básico de competências matemáticas (OCDE, 2006). Estes resultados apontam que os alunos têm mais dificuldades na resolução de problemas e ao nível do raciocínio matemático. Considera-se que a ligação da matemática aos aspetos sócio-culturais da matemática assume um papel primordial para a resolução ou melhoria de alguns destes problemas, nomeadamente na Geometria (*ibidem*).

Coelho (2008) afirma que a investigação tem revelado que os fracos resultados dos alunos nos seus estudos, são influenciados pelas características próprias dos alunos, por fatores contextuais - tais como o ambiente escolar, o ambiente e o apoio escolar. Mourão & Almeida (1993) realçam que insucesso não é sinónimo de nota negativa no término de cada período e/ou no final do ano letivo, mas diz respeito ao discente que não compreende o que faz nem porque o faz, apesar de ter atingido uma classificação razoável. Ou seja, há insucesso sempre que não se atinjam as competências definidas para o ciclo em que o aluno se encontra. Neste contexto, constata-se então que as dificuldades dos discentes relativamente à disciplina de matemática relacionam-se com o insucesso escolar e, como referem Almeida, Mourão, Barros, Fernandes & Campelo (1993), estas dificuldades têm carácter cumulativo e criam, muito facilmente, nos discentes e nos docentes, sentimentos negativos, gerando um sentimento de que nada vale a pena fazer.

Ponte (2002) refere que esta disciplina deve estimular o desenvolvimento intelectual dos alunos, incrementando uma forma de pensar essencial para a sua vida e para o exercício da cidadania. Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999) afirmam que o ensino da disciplina de matemática pode cooperar, de forma bastante significativa e inigualável, para auxiliar os alunos a tornarem-se pessoas que sejam competentes, críticas e confiantes nos aspetos essenciais em que a sua vida se relaciona com a matemática. Para Guimarães (2003), a importância de ensinar matemática deve-se medir, não unicamente pelo que traz de imediato aos discentes para se situarem melhor no conjunto de práticas e de conhecimentos, mas também, o que pode fornecer, hoje para abordarem, ao longo da vida, os problemas futuros da humanidade.

Como já foi referido anteriormente, o novo programa de matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007, p. 3) refere que *(...) a disciplina de Matemática no ensino básico deve contribuir para o* *desenvolvimento pessoal do aluno, deve proporcionar a formação matemática necessária a outras disciplinas e ao prosseguimento dos estudos (...) e deve contribuir, também, para sua plena realização na participação e desempenhos sociais e na aprendizagem ao longo da vida*. Assim, esta ciência constitui uma forma de pensar que inclui resolução de problemas, comunicação e compreensão de conceitos. Crato (2006, p. 93) considera que *No ensino da matemática, em particular, é necessário levar o estudante a progredir etapa a etapa, começando a perceber os conceitos, dos mais elementares aos mais complexos. Paralelamente, é necessário formalizá-los em situações gerais. Finalmente, é desejável aplicá-los criativamente*.

Os aspetos e as razões que justificam a importância de ensinar matemática são, para Ponte (2002, p. 13):

> *a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental do ensino da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância.*

Ponte (2002) considera que, as práticas de ensino são influenciadas pelo sistema de avaliação, pelos manuais escolares e pela cultura profissional dos docentes e, por isso, distanciam-se, muitas vezes, do que é enunciado de forma oficial. Assim, este mesmo autor refere que a matemática é socialmente concebida para conduzir ao insucesso. Segundo Cabrita (1993), esta situação é muito preocupante, dado que o mundo atual é cada mais matematizado. A matemática é uma disciplina escolar obrigatória para quase a totalidade das áreas vocacionais, o que atribui especial importância ao insucesso nesta disciplina, visto que pode determinar o percurso escolar dos alunos. Esta disciplina enfrenta, ainda, alguns mitos que foram surgindo ao longo dos anos e que condicionam o processo de ensino-aprendizagem da matemática e determinam, em certa medida, o insucesso da disciplina. Um dos mitos é que a matemática é uma ciência que não permite ou não contempla o erro, é estática e cumulativa. Além disso, a matemática tem sido vista como a disciplina do cálculo, não dando valor aos restantes conteúdos que desenvolvem outras capacidades (Cabrita, 1993). Esta mesma autora, refere que a concepção acerca da matemática escolar é que esta está totalmente desligada do real, é uma ciência pura, abstrata e autosuficiente por natureza. Igualmente comum é a ideia que esta disciplina tem que ser obrigatoriamente expressa utilizando os símbolos específicos (*ibidem*). Consequentemente, afirma que com estas concepções não admira que as pessoas considerem que a matemática é uma disciplina apenas acessível a pessoas sobredotadas intelectualmente e onde os “menos inteligentes” não teriam nada interessante e novo a propor. Nesta linha, Almeida (2011) refere que as concepções negativas que a sociedade possui em relação à matemática, influencia fortemente o ensino da disciplina, confrontando muitos docentes com a necessidade de travar um combate no qual se parte, desde o princípio, em desvantagem. Ponte (2003, p. 38) afirma que *Achar que a Matemática não serve para nada e ser incapaz de usar ideias* *e representações matemáticas para lidar com situações do dia a dia, são talvez os aspectos mais negativos do insucesso da disciplina*.

É importante estudar as causas e as formas de combate a este problema que afeta um elevado número de pessoas, a diversos níveis. Chagas (2003, p. 241) aponta, de um modo geral, as seguintes causas para o insucesso na matemática:

> *inadequação do ensino de matemática em relação ao conteúdo, à metodologia de trabalho e ao ambiente em que se encontra inserido o aluno em questão; má formação de professores, ou seja, falta de capacitação docente; programas de matemática não flexíveis e muitas vezes baseados em modelos de outros países e consequentemente, são modelos que muitas vezes não representam a realidade sócio-económica do país; falta de compreensão e domínio dos pré- requisitos fundamentais que ajudariam este estudante a obter um bom desenvolvimento nas aulas de matemática; desvalorização sócio-económica dos professores.*

Na perspetiva de Ponte (2003, p. 51) *a matemática deve ter por grande finalidade contribuir para o desenvolvimento dos indivíduos, capacitando-os para uma plena participação na vida social, com destaque para o exercício de cidadania*. Para que tal aconteça, preconiza que os alunos devem ter experiência matemática genuína, lidando com situações e ideias matematicamente ricas e usando conceitos matemáticos na interpretação e modelação de situações da sociedade atual. Deste modo, Ponte (2003, pp. 52-53) aponta que um programa de combate ao insucesso em matemática deverá conter diversos elementos, entre os quais:

> *1. Clarificar as finalidades do ensino da matemática, com equilíbrio e sem ceder a interesses particulares, por mais legítimos que sejam, sem esquecer que o está prioritariamente em causa, no ensino básico e secundário, não é a formação de uma elite científica mas, é sobretudo, a formação da generalidade dos alunos para participar activa e criticamente numa sociedade marcada pela presença da tecnologia.*
> *2. Expectativas claras e positivas para os alunos. Estes devem saber o que se espera deles. Devem também saber que se acredita que eles são capazes de atingir esses objectivos e que têm uma responsabilidade fundamental nesse processo. Os enunciados do currículo nacional do ensino básico constituem, para isso, um bom ponto de partida.*
> *3. Diversificar os programas. Atender, no ensino secundário à diversidade de interesses e de capacidades dos alunos, por demais evidente nas áreas e vias de ensino que escolhem. Ter em atenção, no ensino básico, as necessidades dos professores fazerem uma gestão criativa do currículo em função das realidades locais e das características dos seus alunos.*
> *4. Reduzir o papel que a matemática tem como instrumento de selecção, ao estritamente necessário. O melhor seria repensar todo o sistema de acesso ao ensino superior e repensar o modo como este pode lidar com os alunos que lhe chegam com uma preparação matemática inferior ao desejável.*
> *5. Promover uma nova cultura profissional entre os professores, apoiando os seus projectos, proporcionando-lhes oportunidades de formação adequada e dotando as escolas das necessárias condições e recursos.“*

Acrescenta, ainda, que poderá haver quem pense ser possível resolver os problemas do ensino da matemática aumentando a pressão da avaliação sumativa, mas este autor considera que isso constituiria um erro: *A motivação principal para o estudo da matemática tem que ser positiva e deve apoiar-se numa visão clara sobre o interesse desta disciplina* (*ibidem*, p. 53). Também poderá haver a ideia que é isolando a matemática sobre si mesma, reduzindo-a a papel e lápis, proibindo o uso das novas tecnologias, que melhor se poderá preservar a pureza desta disciplina, mas no entender de Ponte, uma matemática assim, não teria qualquer ressonância cultural nos jovens na nossa sociedade e seria, certamente, acolhida com uma indiferença ainda maior, frisando que a *chave para a melhoria do ensino está nos professores* (*ibidem*, p. 53). Deste modo, o ensino da matemática só melhorará com o empenho criativo e responsável em projetos e iniciativas, envolvendo no seu entusiasmo os seus próprios alunos, frisando que isto será conseguido se houver diálogo com os professores, ouvindo as suas preocupações e mobilizando os seus conhecimentos profissionais. De igual modo, os outros atores educativos e sociais têm que participar na melhoria do ensino, incluindo os que produzem materiais educativos e os que fazem formação dos professores, no campo da matemática e sua didática; os que podem contribuir para a construção de uma nova imagem social desta disciplina e os que podem intervir para uma efetiva melhoria das condições nas escolas para o ensino - aprendizagem desta disciplina. Por fim, afirma que a criação de uma imagem positiva de empenho concertado dos principais atores em mudar o panorama do ensino desta disciplina é um passo essencial (*ibidem*).

2.2 Etnomatemática

O presente subcapítulo apresenta os conceitos e aplicações da etnomatemática com o objetivo de elucidar a sua essência, objetivos e contribuições para o ensino. O objetivo é fazer uma breve exposição das principais ideias em etnomatemática que foram surgindo ao longo da sua história, procurar visualizar quais poderão ser as suas aplicações em educação, ressaltando o seu caráter transdisciplinar e interdisciplinar, assim como a valorização e manutenção de tradições culturais[4], conhecer as várias dimensões da etnomatemática: conceptual, histórica, cognitiva, epistemológica, política e educacional, analisar o currículo de matemática sob a perpetiva da etnomatemática e por fim, tecer considerações a respeito da etnomatemática.

2.2.1 Enquadramento teórico

Segundo Sebastiani Ferreira (2004), depois do fracasso da matemática moderna, na década de 70, apareceram várias correntes educacionais entre os profissionais da educação matemática, com uma componente comum - a forte reação contra a existência de um currículo comum e contra a imposição de apresentar a matemática como um conhecimento universal e constituído por verdades absolutas. Estes profissionais perceberam que não havia espaço na dita matemática moderna para valorizar os conhecimentos que o aluno trazia para a sala de aula, oriundos do seu meio social, e

4 De acordo com Nieto (2000), a cultura consiste em valores, tradições, relações sociais e políticas, e uma visão do mundo que é compartilhada e transformada por um grupo de indivíduos que estão conectados por uma história comum, pela localização geográfica, pela linguagem, pela classe socioeconómica e pela fundamentação religiosa. Então a cultura inclui aspetos considerados culturalmente tangíveis como a culinária, os feriados, o vestuário, os trajes típicos e as expressões artísticas, bem como outras manifestações menos tangíveis como os estilos de comunicação, as atitudes, os

começaram a dar mais atenção a este tipo de conhecimento, destacando os conhecimentos provenientes, por exemplo, do vendedor de rua, das brincadeiras de rua de crianças, dos pedreiros, dos artesãos, dos pescadores, das donas de casa, etc. (*ibidem*).

2.2.2 Primeiras tentativas de conceptualização

D'Ambrósio, matemático e educador matemático brasileiro, é considerado por muitos dos seus pares como o "pai" da etnomatemática, no sentido de que foi um dos pioneiros da teorização desta área do saber**.** D'Ambrósio (1990, p. 5), refletindo sobre a formação da palavra etnomatemática afirma que esta resultou da junção das raízes "tica", "matema" e "etno":

> *Etno: É hoje algo muito amplo, referente ao contexto cultural e, portanto inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos;*
> *Matema: É uma raiz difícil, que vai à direção de explicar, conhecer, entender;*
> *Tica: Vem sem dúvidas de Tchne, que é a mesma raiz de arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender os diversos contextos culturais.*

Nesse sentido, na conceptualização deste termo, D`Ambrósio (2001, p. 9) exibe o seu ponto de vista sobre esta disciplina:

> *Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos. Além desse carácter antropológico, a etnomatemática tem um indiscutível foco político. A etnomatemática é embebida de ética, focalizada na recuperação da dignidade cultural do ser humano.*

É de acordo com esta definição que se aborda as aplicações em diferentes culturas, conciliando os saberes matemáticos produzidos pelos diferentes grupos sociais, trabalhando, assim, a ligação de assuntos do seu quotidiano com os assuntos abordados em sala de aula. O primeiro Newsletter do IGSEm, contempla uma definição aproximada da etnomatemática como a zona de confluência entre a matemática e a antropologia cultural mas ainda persistem as metáforas como a matemática no contexto-cultural ou matemática- na sociedade. Esboça-se, de seguida, algumas definições dadas por diferentes pesquisadores segundo Sousa & Pereira (2010):

Para Marcelo Borba (1993, p. 56, citado em Sousa & Pereira, 2010, p. 3), a etnomatemática é a expressão de traços de cultura que procura identificar os seus próprios problemas e soluções culturais, identificando assim as suas atividades geratrizes, ou seja, *uma forma matemática que expressa traços de uma dada cultura, na tentativa de resolver problemas que são expressão desta cultura*. Para Gelsa Knijnik, que trabalhou com o Movimento dos Sem Terra no Brasil, a etnomatemática investiga práticas que fomentam habilidades tais como a descodificação de conhecimentos:

---

valores, e as relações familiares. Estes aspetos culturais são difíceis de compreender e por isso tem que haver um esforço para compreende-los, se se quiser entender como esses fatores podem afetar a aprendizagem dos alunos (ibidem).

> *A investigação das tradições, práticas e concepções matemáticas de um grupo social subordinado (quanto ao volume e composição de capital social, cultural e económico) e o trabalho pedagógico que se desenvolveu com o objetivo que o grupo interprete e descodifique o seu conhecimento e adquira o conhecimento produzido pela matemática académica e estabeleça comparações entre o seu conhecimento e o conhecimento académico, analisando as relações de poder envolvidas no uso destes dois saberes.* (Knijnik, 2001, p. 88, citado em Sousa & Pereira, 2010, p. 4)

Deste modo, pode afirmar-se que o conceito de etnomatemática apresenta conotações sociais, interagindo com a formação do saber matemático e mostrando a importância da matemática nas nossas vidas. Sebastiani Ferreira (2009, citado em Sousa & Pereira, 2010, p. 4) faz uma revisão da literatura sobre o conceito de etnomatemática e em 1997, a etnomatemática é vista como uma "matemática codificada no saber-fazer" onde o papel do docente é procurar novas estratégias para desenvolver projetos relacionados com a matemática, que tenham importância para o seu contexto social. Nesta concepção, o docente exerce o papel de um pesquisador ativo e interpretador das regiões a serem trabalhadas. Citado por Ferreira (1997, p. 22, citado em Sousa & Pereira, 2010, p. 4), Ascher define a etnomatemática como sendo *a matemática de povos não-letrados, reconhecendo, como pensamento matemático, noções que de alguma maneira correspondem ao que temos na nossa cultura*. Assim sendo, para Ascher, cada povo ou grupo exerce a sua matemática, de forma diferente e proveitosa, passando de geração em geração. Gerdes (1991, citado em Sousa & Pereira, 2010) fala da etnomatemática como sendo um programa em permanente evolução, pois *talvez seja provisoriamente melhor falar de um acento Etnomatemático na investigação da educação matemática, ou de um movimento Etnomatemático* (Gerdes, 1991, p. 32, citado em Sousa & Pereira, 2010, p. 5). Na concepção de Scandiuuzi (2003, p. 5, citado em Sousa & Pereira, 2010, p. 5), a etnomatemática *(...) valoriza a matemática dos diferentes grupos sócio-culturais e propõe uma maior valorização dos conceitos matemáticos informais construídos pelos alunos através das suas experiências, fora do contexto da escola*.

Vergani (2000, p. 24) refere que a etnomatemática compreende o *estudo comparativo de técnicas, modos, artes e estilos de explicações, compreensão, aprendizagem, decorrentes da realidade tomada em diferentes meios naturais e culturais.* Para esta autora, a palavra "etno" lembra (mais ou menos conscientemente) "nativa" ou "indígena" e continua, afirmando, que a palavra "indígena" e "indigente" apresentam conceitos bem próximos. Menciona, ainda que a escola é responsável pelo insucesso de grande parte de uma sociedade, criando, assim, um subterceiro mundo numa sociedade de terceiro mundo. Refere, ainda, que: *(...) os processos que empreende e os resultados que obtém, acontecem a partir do seu significado humano e não a partir das construções matemáticas em si mesmas* (*ibidem*).

Ainda segundo Gerdes (2007, p. 156):

> *A etnomatemática é a área de investigação que estuda as multifacetadas relações e interconexões entre ideias matemáticas e outros elementos e constituintes culturais, como a língua, a arte, o artesanato, a construção, a educação. È a área de investigação que estuda a influência de factores culturais sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. È a área de investigação que estuda os conhecimentos matemáticos dos povos "índigenas". A etnomatemática é também a área de investigação que estuda os saberes e saberes-fazer matemáticos adquiridos e desenvolvidos na actividade prática, pelos vendedores nas ruas, pelos trocadores de dinheiro, pelos cesteiros, pelos pintores, pelas costureiras, pelas tecelãs, pelos jogadores de diversos desportos, pelas cozinheiras, (...).*

Ainda, Gerdes (2007, p. 54), *a etnomatematica mostra que ideias matemáticas existem em todas as culturas humanas, nas experiências de todos os povos, de todos os grupos sociais e culturais, tanto de homens como de mulheres.*

De acordo com Sousa & Pereira (2010, p. 5), esta diversidade e multiplicidade de conceitos não mostra uma etnomatemática diferente mas em evolução e aperfeiçoamento. Todos os conceitos sobre etnomatemática acima citados, relacionam-se com realidades diferentes e pode-se resumi-los segundo o ponto de vista dos diversos autores: D´Ambrósio afirma que a interferência na realidade se dá através de processos gerados, Knijnik relata que a investigação de práticas matemáticas ou concepções estão direcionadas para o trabalho pedagógico. Para Ferreira, a matemática está incorporada na natureza real do aluno e para Borba, a investigação dos processos gerados numa cultura visa as aplicações pedagógicas. De acordo com Achers, a matemática simbólica é verificada em povos subdesenvolvidos e Gerdes, expressa a Etnomatemática como sendo a Matemática escondida nas culturas subdesenvolvidas. Tendo esses conceitos em vista, pode-se afirmar que a etnomatemática é um instrumento auxiliar na sala de aula para o docente desenvolver as suas atividades, fazendo a absorção das potencialidades existentes nos seus alunos (*ibidem*).

2.2.3 Movimento etnomatemático

Segundo Gerdes (2007), verifica-se um movimento etnomatemático[5], em que o etnomatemático usa um conceito amplo de matemática (incluindo, em particular, contar, localizar, medir, designar, jogar, explicar), enfatiza e analisa as influências dos fatores socio-culturais no processo de ensino - aprendizagem e do desenvolvimento da matemática. Nesse sentido, dá atenção ao facto de a matemática ser um produto cultural; acentua que cada pessoa, que pertence a uma cultura e a uma subcultura, desenvolve a sua matemática específica. A matemática é uma atividade universal e pan-humana e tratando-se de um produto cultural, tem uma história que se desenvolveu em várias direções devido a condições económicas, sociais e culturais; enfatiza que a matemática escolar do currículo transplantado e importado é alheia às tradições culturais não europeias. Esta matemática que parece que não vem do Terceiro Mundo, grande parte dos seus conteúdos tem a sua génese em África ou na Ásia; tenta contribuir para o conhecimento das realizações matemáticas dos povos colonizados, procurando elementos culturais que sobreviveram ao colonialismo, que revelam pensamento matemático e outras formas de pensamento científico e tenta reconstruir estes pensamentos matemáticos; pesquisa, nos países do Terceiro Mundo, tradições que sobreviveram à colonização e atividades matemáticas da vida quotidiana e analisa modos e formas de as incorporar no currículo; procura outros elementos e atividades culturais que possam servir de ponto de partida para fazer e elaborar a matemática na sala de aula e no contexto educacional; e, por fim, no contexto educacional, favorece, uma educação matemática crítica, permitindo que o aluno reflita sobre a sua realidade e desenvolver e usar os conhecimentos matemáticos de maneira libertadora (*ibidem*).

2.2.4 Experimentação educacional

O uso da etnomatemática como estratégia facilitadora no processo ensino - aprendizagem

As constantes mudanças científicas, tecnológicas e ao nível sócio-cultural, caraterísticas do mundo moderno, exigem do docente, o desenvolvimento de novas competências, que funcionem como chaves para facilitar o processo ensino - aprendizagem. De entre as várias tendências desenvolvidas em Educação Matemática aponta-se o movimento etnomatemático que se baseia no pressuposto de que é possível facilitar o processo ensino-aprendizagem da matemática, a partir do conhecimento que o aluno adquire e adquiriu no seu ambiente cultural (no meio em que está inserido). Até agora, grande parte da investigação etnomatemática desenvolvida tem-se ocupado em demonstrar que existem várias formas culturais matemáticas, diferentes da matemática dominante, padronizada, académica e escolar, e em analisar estas formas, tentando percebê-las. Para tal, diversas abordagens investigativas têm sido desenvolvidas. Bishop (1994, p. 15, citado em Gerdes, 2007, p. 207) distingue três importantes abordagens investigativas etnomatemáticas com os seguintes focos:

> *- o conhecimento matemático em culturas tradicionais- Esta investigação recolhe informação segundo uma abordagem antropológica, dando enfase à singularidade de conhecimentos e práticas particulares, em relação a diferentes culturas. As linguagens também são significativas nestes estudos, em conjunto com os valores e hábitos dos grupos abrangidos no estudo.*
> *- conhecimento matemático em sociedades não-ocidentais- Esta investigação possui uma vertente histórica, apoiando-se, como de facto acontece, em documentos antigos mais do que nas práticas atuais.*
> *- conhecimentos matemáticos de diversos grupos numa sociedade- Esta investigação tem uma ênfase sócio-psicológica, sendo o foco nas práticas actuais. O conhecimento particular matemático é construído socialmente pelos grupos envolvidos em práticas específicas.*

Apresenta-se de forma resumida alguns exemplos de caminhos que usam ideias etnomatemáticas na área de educação Gerdes (2007, pp. 209- 213):

---

5 Gerdes chama de acento etnomatemático quando se refere à pesquisa em si e movimento etnomatemático quando este for utilizado de forma pedagógica.

1. *Incorporação/introdução, no currículo, de elementos que pertencem ao ambiente sócio-cultural dos alunos e dos docentes, como ponto de partida para as atividades matemáticas na sala de aula, aumentando a motivação dos alunos e dos docentes.*
2. *Consciencialização dos futuros professores de matemática e dos educadores matemáticos da existência, em pessoas com pouco ou nenhuma educação formal, de ideias matemáticas semelhantes ou diferentes das dos livros de texto; aprender a respeitar e a aprender com outros seres humanos, possivelmente pertencentes a outros (sub)grupos sociais/culturais.*
3. *Preparação de futuros docentes de matemática para investigarem as ideias e práticas das suas próprias comunidades culturais, étnicas e linguistícas e para procurarem formas de construir o seu ensino a partir delas.*
4. *Incorporação/introdução, no currículo, de material de diversas culturas, de forma a valorizar os backgrounds culturais de todos os alunos, aumentando a auto-estima (dar poder cultural) de todos, e respeitar todos os seres humanos e culturas.*
5. *Incorporar na formação de professores ideias matemáticas de vários grupos culturais/ linguísticos de um país ou região e/ou desenvolvidas por vários grupos sociais tais como cesteiros, oleiros e empregados de construção civil, de modo a contribuir para o entendimento mútuo, o respeito e a valorização das (sub)culturas e atividades.*
6. *Usar ideias incorporadas nas atividades de certos grupos culturais e sociais (marginalizadas) duma dada sociedade, para desenvolver um currículo matemático para e com/de este grupo.*
7. *Introdução, nos livros de texto, de elementos culturais facilitadores da aprendizagem, por serem reconhecidos e apreciados pela (maioria) dos alunos como pertencentes à sua cultura.*
8. *A elaboração de materiais da herança matemática dos antepassados dos alunos, introduzindo-os na formação de professores e/ou nos currículos escolares.*
9. *Elaboração de materiais que explorem as possibilidades de atividades matemáticas, começando com designs atrativos, do ponto de vista artístico, e pertencentes à cultura (provavelmente em sentido lato) dos alunos ou dos seus antepassados.*

Segundo Bello (2004, citado em Campos, 2006) a abordagem etnomatemática no contexto escolar permite ter melhores possibilidades de apropriação da realidade cultural com a qual se trabalha. Dessa forma, docentes que atuam numa determinada realidade educacional tomam contato com caraterísticas e relações sociais de modo bastante direto, às quais muitas vezes na qualidade de pesquisador, numa realidade pouco ou quase nada familiar, não se tem acesso. E, porque o destaque investigativo em etnomatemática deverá estar direcionado à procura da participação conjunta e em estreita vinculação com o professor, uma vez que *a ideia de formação é inseparável de um determinado campo teórico e de um contexto histórico, no qual é formulada a proposta pedagógica, de sorte que esta não pode ser compreendida sem a compreensão do papel atribuído ao pedagogo com relação à sociedade, à política, ao saber* (Chauí, 1979, p. 24 citado em Campos, 2006). Ainda, segundo Bello (2004, citado em Campos, 2006), o docente, nesse processo de inter-relações culturais, está exposto a uma realidade de confronto entre diferentes tipos de saberes. No entanto, destaca que esse modelo é apenas o início para a procura de transformações político-sociais e educacionais mais amplas. O docente, enquanto principal agente no contexto escolar, possui conhecimentos e experiência para (re)interpretar e refletir sobre situações em sala de aula e as práticas sociais inerentes. Refere, ainda, que é o docente também que vai mostrar as disciplinas do currículo "oficial" no momento pedagógico a ser desenvolvido com os alunos, os quais participarão com as suas expetativas, necessidades, conhecimentos e desempenharão, no trabalho de síntese.

A Etnomatemática, presente na escola, segundo o mesmo autor, não é mais a Etnomatemática do grupo ao qual o aluno pertence, mas ela passa a adquirir caraterísticas "distintas", tais como capacidade critica e de reflexão, isto porque a instituição educacional, enquanto instituição legítima, muitas vezes, é "distinta" da realidade social. Assim, a Etnomatemática é (re) contextualizada para um novo contexto, o escolar, e com uma ação ativa do docente, no seu contexto escolar, poderá conseguir um ambiente favorável para a discussão e interação entre diversas maneiras de explicar e conhecer, e notar assim, as relações de dominação, aceitação e resistência cultural entre as mesmas (*ibidem*). Schmitz (2004) refere que uma possibilidade para se opor a um ensino que exclui, é o docente ser capaz de investigar e incorporar a cultura dos seus alunos no currículo escolar. Para Monteiro & Pompeu Jr (2001, p. 66) *o ensino da matemática numa abordagem Etnomatemática permite uma compreensão crítica da realidade, ou, mais do que isso, permite ao aluno optar pela forma de resolver suas questões, na medida em que não impõe o saber institucionalizado ao saber do senso comum, mas apenas os problematiza e compara, possibilitando a opção consciente de qual caminho se pretende seguir*.

2.2.5 Educação matemática na perspetiva etnomatemática

Segundo D`Ambrósio (2001), a etnomatemática apresenta, na sua essência, uma dimensão política, pois, ao conceber a matemática como um produto cultural, a etnomatemática torna a matemática como uma ciência do povo, recuperando-o enquanto sujeito histórico. A história da matemática revela que esta ciência se constituiu em conhecimento para alguns dirigirem a sociedade ou, ainda, para preparar e obter mão de obra barata (*ibidem*). Assim, a pretensão da etnomatemática é a educação multicultural, que valoriza e reconhece como legítimo o saber matemático das diversas culturas, paralelamente à matemática escolar. A valorização exagerada do conhecimento matemático escolar desqualificou o saber advindo das experiências vividas pelas pessoas no seu quotidiano, quanto mais esta se distancia do saber do mundo cultural das pessoas, mais fácil se torna a imposição de uma cultura determinada (*ibidem*). O mesmo autor aponta que a principal razão de a etnomatemática ser tema de pesquisas é para refletir sobre a importância de se valorizar os saberes culturais e de reconstruir a autoestima de povo (*ibidem*). A educação matemática, no enfoque da etnomatemática, contempla o saber oriundo do quotidiano, que está imbuído de saberes e fazeres que são próprios da cultura. Como afirma D'Ambrósio (2001), a todo o momento, as pessoas comparam, classificam, qualificam, medem, explicam, generalizam, inferem e avaliam, utilizando os instrumentos de índole material e intelectual próprios da sua cultura. Este autor refere que a etnomatemática é a matemática da vida, presente no dia a dia, que não ocorre na escola e nessa perspetiva, a escola é convidada a trabalhar com os conhecimentos que surgem da realidade -

do contexto social. A matemática enquanto disciplina escolar precisa de ser apresentada e trabalhada, de forma contextualizada, sendo passível de diferentes relações com outras áreas do conhecimento e com as necessidades e história de vida do grupo social (*ibidem*).

Outro aspeto importante da etnomatemática é a referência que D'Ambrósio (2001) tece sobre o ensino da matemática na perspetiva de se considerar a cultura dos alunos. A Educação Matemática precisa de (e recomenda) trabalhar com os saberes oriundos do quotidiano dos alunos para constituir conhecimentos que os ajudem a resolver situações - problema do seu contexto social. A etnomatemática nunca teve a pretensão de substituir a matemática escolar, como menciona D'Ambrósio (2001). Este mesmo autor afirma que a proposta pedagógica da etnomatemática é considerar a educação multicultural como uma possibilidade para preparar gerações futuras mais felizes e o docente tem o compromisso de oferecer aos seus alunos uma visão crítica e os instrumentos adequados para viver bem numa sociedade impregnada de tecnologia. Então, a Educação Matemática, na perspetiva da etnomatemática, exige o desenvolvimento crítico da capacidade de saber – fazer do aluno, para promover e provocar ações que vão transformar o seu contexto social.

Segundo Gerdes (2007), a etnomatematica mostra que uma condição para que a escola contribua para a realização do potencial de cada criança ou de cada jovem reside na integração e incorporação dos conhecimentos matemáticos que a criança/jovem aprende fora da escola. Refere que esta aprendizagem que é exterior à escola pode ser informal, espontânea, mas, contudo, é real e que cada criança sente-se à vontade no seu contexto cultural, na sua maneira de contar, na sua língua materna. Assim, este contexto deve constituir o fundo em cima do qual se continua a construir conhecimentos na escola, pois aumenta também a motivação e a autoconfiança individual de cada criança (*ibidem*). Gerdes acrescenta que a motivação de uma criança para o estudo passa, também, pela identificação das pontes que ela possa fazer entre o saber escolar e a sua própria vivência. Para concretizar esta ideia, garante que se podem incorporar no currículo elementos pertencentes ao ambiente sócio-cultural dos alunos e dos professores para que os possam usar nas atividades da sala de aula (*ibidem*). Considera, no entanto, que isto é importante mas não é suficiente e afirma que *A etnomatematica mostra que uma outra condição indispensável reside na integração e incorporação no processo de ensino-aprendizagem dos conhecimentos, dos saberes e dos saberes-fazer da cultura do povo, ao qual a criança pertence. Só assim se pode aumentar a autoconfiança cultural e social (...)* (*ibidem*, p. 159). Para este investigador, a etnomatemática mostra que através dessa integração pode-se construir uma ponte entre a cultura, a história cultural e o património universal, podendo as novas gerações escolher os conhecimentos necessários para o desenvolvimento harmonioso das suas comunidades. Acresce que num contexto onde coabitam várias culturas, vivendo em proximidade geográfica, proporcionar apoio na história e nas bases culturais materiais dos vários povos e grupos constituintes, é importante para que todos se sintam valorizados e respeitados. Desde que bem integradas no currículo, as atividades baseadas na etnomatemática poderão aumentar a confiança, alargar o horizonte matemático e cultural e aprofundar a compreensão e a aprendizagem de todos os alunos (*ibidem*).

2.2.6 Dimensões da etnomatemática

Segundo D`Ambrósio (2001), a investigação em etnomatemática pode organizar-se em torno de seis dimensões distintas: concetual, histórica, cognitiva, epistemológica, política e educacional. Este autor argumenta que na dimensão conceptual da etnomatemática, a espécie humana criou teorias e práticas, a partir de representações da realidade, para resolver a questão existencial, sendo que estas teorias e práticas são a base de elaboração de conhecimentos e decisões comportamentais, presentes em cada cultura. A dimensão histórica da etnomatemática oferece a interpretação histórica dos conhecimentos, incluindo o conhecimento matemático, e esta interpretação procura analisar e compreender o momento cultural de cada povo. A dimensão cognitiva discute as formas de pensar presentes na espécie humana. O autor argumenta que na dimensão epistemológica os sistemas de conhecimentos são conjuntos de respostas que um grupo dá às pulsões de sobrevivência e transcendência inerentes à espécie humana, ou seja, os fazeres e saberes de uma determinada cultura no desenrolar da história. D` Ambrósio (2001) discute na dimensão política a forma de dominação através da colonização, tendo esta removido de forma devastadora elementos da cultura do povo dominado, incluindo a sua língua, a sua religião, o seu modo de lidar com a terra e com a natureza e também os modos de pensar e lidar com o conhecimento. Por fim, a dimensão educacional da etnomatemática tem o intuito de aprofundar a discussão acerca do conhecimento matemático e convidar a olhá-lo de forma indireta pela perpectiva da etnomatemática. Neste sentido, D`Ambrósio (2001) defende a necessidade de repensar o modo como a matemática académica está a ser ensinada na escola, de forma, muitas vezes, obsoleta e sem fazer sentido para o aluno.

2.2.7 Aspetos relevantes da etnomatematica

O conhecimento não é adquirido apenas na escola

Pires (2008) refere que a etnomatematica tem o papel de mostrar e evidenciar que mesmo os povos não escolarizados possuem conhecimentos matemáticos e que esse conhecimento não possui menor valor por ter não sido aprendido na escola, mas que apenas é diferente. A etnomatematica não despreza a matemática científica/ escolar e não propõe que os manuais escolares deixem de ser usados. Propõe, apenas, que os professores de matemática percebam que o objetivo desta é tratar a matemática numa linguagem mais próxima da realidade do aluno.

Etnomatemática: o saber matemático e o saber cultural

Ao longo dos tempos e em todas as culturas, pode-se encontrar uma atividade matemática que exibe a existência de algum tipo de saber/conhecimento matemático. Nas culturas modernas, onde a tecnologia de ponta prolífera, é fácil perceber e entender o uso implícito da matemática, nomeadamente em instrumentos tecnológicos (Pires, 2008). Nas culturas de pequena dimensão, que vivem afastadas dos grandes centros urbanos, encontram-se, igualmente, tradições de índole cultural, onde existem, de forma implícita, alguns conhecimentos matemáticos bem perceptiveis, por exemplo, no artesanato, nas diversas artes, nos jogos populares, na arquitetura popular em que não interveio o conhecimento instituído. O mesmo se pode dizer em relação a culturas da Antiguidade - os vestígios deixados provam que estas culturas detinham conhecimentos matemáticos sofisticados, que foram aplicados em grandiosas construções, em peças de artesanato e até nas atividades quotidianas de sobrevivência, como a pesca, a caça ou a agricultura (*ibidem*). Esta mesma autora refere que tanto para muitos elementos das sociedades altamente tecnológicas como os das de pequena escala, não existe propriamente uma consciencialização da matemática envolvida no seu quotidiano, nas suas tradições, práticas e artefactos. Em várias situações, encontra-se uma atividade (matemática) que reflete a execução de atos espontâneos que são repetidos (os mais antigos de geração após geração) e que sobrevivem através de uma prática continuada mais por imitação do que alicerçados em explicações teóricas e abstratas (*ibidem*). Pode observar-se no uso do telemóvel, assim como na elaboração de cestos e tapetes. Pires remata dizendo que este saber-fazer, onde se encontra de uma forma implícita conhecimento matemático é particularmente interessante em certas profissões e práticas culturais. Durante muito tempo, os saberes de algumas profissões e culturas não foram considerados como fontes de sabedoria e de conhecimentos, contudo, de forma gradual e muito recentemente, alguns estudiosos começaram a reconhecer o valor do saber popular. Estes aperceberam-se de que a matemática também se pode reconhecer em contextos não escolares e reconheceram o interesse epistemológico da sabedoria prática e do "saber-fazer" praticamente desprovido de uma base teórica (*ibidem*).

A etnomatemática e o seu aspeto sócio-cultural

Segundo D`Ambrósio, a etnomatemática ao discutir o papel que os contextos culturais têm na aprendizagem de conceitos matemáticos permite tornar a matemática mais próxima do contexto sócio-histórico e cultural do aluno e aproximar os conteúdos (matemáticos) trabalhados na escola da realidade dos alunos. A prática vivida pelos alunos faz com que este identifique a ação, determine a teoria e organize os resultados e pensamentos sobre como solucionar as situações problema propostas. Segundo o mesmo autor, o ciclo vital é uma ligação tripla entre realidade, individuo e ação e a relação entre esses três fatores é determinante para que o aluno defina estratégias e resolva os questionamentos. Os objetos de aprendizagem possuem como proposta apresentar situações contextualizadas para os alunos (*ibidem*).

Contributos da etnomatemática para a compreensão da diversidade matemática

Para Vithal & Skovsmose (1997, citados em Pires, 2008), existem quatro linhas principais de pesquisa em etnomatemática: a histórica, na qual se pretende reconstruir a história da matemática em diferentes culturas; a antropológica**,** na qual se investiga as práticas matemáticas de grupos culturais identificados; a do quotidiano, onde são pesquisadas as atividades matemática em contextos não escolares, principalmente, as estratégias de resolução de problemas colocados no dia a dia e a educativa, onde a articulação dos resultados da etnomatemática com o currículo da Educação Matemática é investigada e projetada.

Segundo Moreira (2004), estas linhas de pesquisa, onde existem áreas de sobreposição, abarcam investigações realizadas em várias regiões do mundo, utilizam abordagens inspiradas no método etnográfico e ajudam a compreender como as ideias e as atividades matemáticas variam de cultura em cultura ou de uma sociedade para outra, mas também ao longo do tempo. Mostram, ainda, a diversidade das práticas matemáticas e das estratégias de resolução de problemas que se encontram embutidas na cultura quotidiana de grupos culturalmente distintos ou de comunidades profissionais, persistindo muitas delas até aos dias de hoje através do ensino e da aprendizagem cultural (*ibidem*).

Campos (2006) refere que as investigações no âmbito das culturas locais mostram e evidenciam a variedade de ideias, de práticas e de conceitos matemáticos existentes em contextos extraescolares. Esta diversidade na atividade matemática tem sido relacionada com a matemática escolar e, na globalidade, os resultados das pesquisas evidenciam que as estratégias matemáticas usadas para resolver problemas quotidianos que se colocam na comunidade ou na família, bem como as práticas domésticas de literacia matemática, embora não sendo menos válidas ou menos interessantes, não são do conhecimento da escola, ficando esta impossibilitada de as utilizar em proveito do entendimento da matemática escolar. Por outro lado, salienta que crianças conhecedoras e envolvidas nas práticas matemáticas domésticas não têm, necessariamente, sucesso na matemática escolar (*ibidem*).

Segundo Gerdes (2007)[6] devido a questões políticas, sociais e ambientais, as civilizações foram-se formando e desaparecendo e nem sempre deixaram rastos suficientemente esclarecedores das suas atividades. A extensão e tipo de atividades matemáticas (ou com matemática) depende muito das necessidades sociais, culturais e técnicas de cada civilização e por isso muitos artefatos só são verdadeiramente compreendidos quando esta é bastante bem conhecida. Como assinala Gerdes

6 Os trabalhos desenvolvidos por este autor procuram reafirmar a matemática cultural de um povo colonizado através da comprovação de que muitos resultados matemáticos consagrados pela ciência já eram anteriormente usados por outras

(2007, p. 156), *a etnomatemática mostra que ideias matemáticas existem em todas as culturas humanas, nas experiências de todos os povos, de todos os grupos sociais e culturais, tanto de homens como de mulheres*. O termo de "matemática congelada" usado por este autor, evidencia que, embora se possa não saber a origem de determinado artefacto, pode-se imaginar a matemática que levou à sua construção, pois está de algum modo "congelada", embutida, conservada nesse objeto e com cuidado e paciência, pode-se tentar descongelá-la e admirá-la. Muitas vezes olha-se para os objetos artesanais sem se aperceber de como pode ser rico o pensamento abstrato que está por detrás da sua manufatura, por vezes, extremamente complexa, que explica a sua estrutura e o seu funcionamento. A etnomatemática não é só importante para conhecer a evolução do conhecimento científico dos povos nas suas relações com a sociedade e com a cultura, mas é também importante pela sua contribuição para o ensino e aprendizagem da matemática. Conforme assinala Gerdes (2007), a etnomatemática mostra que uma condição para que a escola contribua para a realização do potencial de cada criança consiste na integração e incorporação dos conhecimentos matemáticos que a criança aprende no exterior da escola:

Este autor acrescenta que a incorporação de elementos ligados a outras culturas diferentes das dos alunos poderá contribuir para outro aspeto muito importante - o de educar para uma cidadania mais tolerante e respeitadora das culturas de outros povos, na medida em que os alunos se apercebem que ideias matemáticas existem em todas as culturas humanas espalhadas pelo mundo. Gerdes (2007) refere que qualquer dos alunos poderá reconhecer algum destes elementos dentro do seu ambiente sócio-cultural, mas, certamente, encontrarão elementos que desconhecem.

2.2.8 Explorações geométricas e aspetos não ocidentais

Para Gerdes (2007, p. 45), de *um modo geral, seres humanos aprenderam a geometrizar no contexto de actividades de trabalho, sendo* que a exploração geométrica constitui a área de atividade matemática por excelência na história da África Central e Austral. Exemplos de atividades culturais com forte caráter artístico e geométrico são a tecelagem de esteiras e cestas, cerâmica, trabalho com missangas, pintura, ornamentação de murais, entrançados no cabelo, tatuagem, escultura em madeira e arquitetura (*ibidem*). Gerdes (2007, p. 160) refere que a atividade matemática é uma atividade humana e sendo assim, uma atividade cultural:

> *Ideias e métodos matemáticos variam de cultura para cultura, e a nossa compreensão do que é a matemática cresce na medida em que essas ideias e métodos se fertilizam mutuamente. Caso a educação matemática pretenda introduzir os alunos em actividades e raciocínios matemáticos, os professores poderão procurar actividades adequadas de diversos contextos culturais e analisar como elas poderão ser integradas no ensino para criar um ambiente verdadeiramente estimulante e enriquecedor para todos os alunos desenvolverem inteiramente o seu potencial.(...). Contudo, bem integradas no currículo,*

---

culturas em tempo remotos. Para este autor, existe todo um conhecimento matemático que se encontra escondido ou congelado em técnicas antigas desses povos e que podem ser utilizados para fortelecer, de forma politica, o grupo.

juntas, essas actividades poderão aumentar a confiança, alargar o horizonte matemático-cultural e aprofundar a compreensão e a aprendizagem de todos os alunos.

Assim, no entender deste autor, a etnomatemática mostra que existem em todas as culturas humanas ideias matemáticas presentes nas experiências de todos os povos, de todos os grupos sociais e culturais, de homens e de mulheres. A etnomatemática e a historiografia da matemática mostram, em conjunto, como os povos descobriram ideias matemáticas a partir das suas atividades práticas. Remata, dizendo a etnomatematica mostra que existe uma grande variação nos métodos inventados em várias partes do mundo para resolver certos problemas de origem matemática (*ibidem*)[7].

2.2.9 Dimensões da etnomatemática nas práticas escolares

Ajudar os alunos menos favorecidos

Para D'Ambrósio (2001), não considerar formas alternativas de saber constitui um grande desperdício de valor humano e educacional. Pires (2008) refere que alunos provenientes de classe sociais menos favorecidas apresentam, geralmente, muitas dificuldades em integrar-se no ensino regular. Afirma que, são, muitas vezes, esses alunos que os docentes desejam e pretendem ajudar, combatendo o insucesso escolar. No nosso país, o ensino obrigatório trouxe para os estabelecimentos de ensino todo o tipo de aluno, das mais variadas proveniências sociais e culturais. Refere que, atualmente, existe insucesso escolar nas zonas rurais e nos centros urbanos. No primeiro caso, onde escasseiam mais os alunos, sendo que, nas zonas mais interiores e, por isso, isoladas, o insucesso se deve à pobreza, à falta de acesso aos meios de comunicação que proliferam nas cidades, mas também à falta de incentivo por parte dos pais que também não avançaram muito nos estudos (*ibidem*). Esta autora, referindo-se aos centros urbanos identifica que as dificuldades maiores proveem das minorias étnicas presentes na escola. Por vezes, numa mesma turma, o professor depara-se com uma variedade cultural enorme e desigual de alunos e a etnomatemática pode ajudar a promover o sucesso escolar, considerando-se que é valorizando o que há de melhor na diversidade cultural a que pertencem as crianças e jovens. Se o docente começar por se aproximar da comunidade ou do grupo a que o aluno pertence, trazendo-o à escola, valorizando determinados aspetos culturais, pesquisando os saberes que possui, facilitará o trajeto contrário ou seja, o aluno a aproximar-se à escola, sentindo-se compreendido e, assim, despertar o seu interesse

7 A pesquisa realizada por este autor mostra a matemática subjacente a muitas atividades de variados povos africanos (mas não só), nomeadamente nos países da África Central e Austral, dá uma ideia de como o pensamento abstrato poderia ter avançado em várias civilizações africanas. Por exemplo, a reconstrução de ideias matemáticas agregadas à tradição *Sona* conduziu-o a pesquisas matemáticas e didáticas e ao estudo de tradições de outros povos que, de um ponto de vista técnico-matemático, apresentam semelhanças com a tradição *Sona*.

pelo docente de matemática, pela matemática como disciplina, e não só, pelo que tem para lhe transmitir (*ibidem*).

Resolver o insucesso escolar através de formas punitivas, eleva os números da exclusão social nas classes menos privilegiadas, refletindo-se no funcionamento geral da sociedade: exclusão social é sinónimo de incremento de problemas sociais e políticos como seja o desemprego, a violência e o crime, mas também o desperdício de muito valor humano que faz falta tornar cada vez mais válido (*ibidem*). D`Ambrósio (2001) refere que a exclusão também resulta em muita apatia na participação social e política e os próprios sistemas de produção e de consumo também sofrem com esta exclusão, havendo, por isso, prejuízo na economia do país. Para este autor, ignorar a riqueza de conhecimento das várias camadas sociais é contribuir, de forma subtil e perversa, para esta exclusão. Este autor questiona por que não agir positivamente, integrando na escola um saber tão válido como o do sistema escolar tradicional. Pires (2008) remata, dizendo que a Etnomatemática oferece uma nova proposta educacional, pois, o mundo atual não é o mesmo de umas décadas atrás, ou seja, registou-se uma enorme evolução e há que "recuperar a dignidade cultural do ser humano" e sabendo como é importante a matemática na vida quotidiana e profissional, considera que seria um desperdício ignorar este saber "popular".

Contribuir para a paz e respeito pelos povos

A contribuição da etnomatemática para a paz pode parecer estranha: o que tem uma área educacional a ver com política, com guerra ou paz? Esse aspeto foi sublinhado pelo próprio fundador da etnomatemática no seu discurso e por Pires (2008), notando-se uma preocupação de educar para a paz através da etnomatemática. Assim como existe uma profunda relação entre a Matemática e os progressos tecnológicos e científicos, regista-se, de forma análoga, a mesma relação da Matemática com a noção de bem e de mal: A ciência e a tecnologia têm registado avanços nos dois sentidos e tem-se o desenvolvimento positivo em prol do bem, sendo exemplos, a descoberta de cura para inúmeras doenças, a criação de aparelhos médicos e outros com objetivo humanitário, etc., mas por outro lado, há a motivação gananciosa de alguns, o desejo de poder, de vingança, que sempre existiram, mas que, ajudadas pela tecnologia e também pelo conhecimento matemático que está subjacente na sua origem, atingiram níveis altíssimos de perigosidade. D'Ambrósio (1998)[8] refere que, o objetivo principal do progresso científico e tecnológico deveria ser o de alcançar a paz. Pires (2008), refletindo sobre o pensamento de D'Ambrósio, refere que o que está em causa é uma educação para a paz, mas também uma matemática para a paz, para que a sociedade se organize de forma mais justa, no futuro, em cooperação e sendo tolerante às

8 Para D`Ambrósio (1998), a matemática só é considerada útil se se conseguir relacioná-la com alguns fatores que procurem mostrar a paz, o amor, a solidariedade, que permitam diminuir a desigualdade social que impera na sociedade.

diferenças. Para D`Ambrósio, a Etnomatemática pode ajudar a criar pessoas mais felizes, cidadãos mais tolerantes, mais solidários e com espírito de equipa. Afirma, igualmente, que não se pode culpar a Matemática de todos os usos destrutivos e perversos utilizados e que não podem ser culpados os Matemáticos e os professores de matemática, sendo que para estes últimos, a sua responsabilidade é de formar os alunos, transmitindo-lhes valores e processos matemáticos (*ibidem*).

Knijnik (1997, p. 74) afirma que os problemas da vida real: (...) *caracterizam-se pela sua complexidade: envolvendo o que chamamos de Matemática, sim, mas há outras variáveis de vida como, por exemplo, de cunho social, cultural, afectivo, económico*. As ideias de D`Ambrósio e de Skovsmose convergem para as ideias de Libâneo (2001), que afirma que é necessário transformar o meio em que as crianças estão inseridas em objeto de estudo, visto que este fornece ótimas bases para o trabalho em sala de aula. Afirma, ainda, que *O trabalho docente deve ser contextualizado histórica e socialmente, isto é, articular ensino e realidade* (*ibidem*, p. 137). E esse conhecimento matemático relaciona-se facilmente com o quotidiano dos alunos, pois o mesmo (...) *está impregnado dos saberes e fazeres da própria cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura* (D'Ambrósio, 2001, p. 22).

O que carateriza a etnomatemática é também o respeito pelas diferentes culturas, bem patente no pensamento de D`Ambrósio (2006, p. 42) *(...) não se pretende a homogeneização da espécie, mas sim a convivência harmoniosa dos diferentes através de uma ética de respeito mútuo, solidariedade e cooperação*. Oliveira (2006) assegura que com a Etnomatemática é possível valorizar a produção matemática de diferentes grupos étnicos. Tais conhecimentos foram surgindo como forma de ultrapassar os problemas e as necessidades do quotidiano do ser humano, estando diretamente relacionados com o contexto natural, social e cultural (D'Ambrósio, 2001). Pelo facto de a matemática ser produzida por diferentes grupos e possuir raízes nos nossos sistemas culturais, está impregnada de valores (D'Ambrósio, 1993). A própria forma como o aluno organiza o seu pensamento e os conhecimentos que já possui devem ser respeitados, pois os mesmos pertencem à sua cultura e ao seu meio sócio-cultural. Esse respeito traduz-se, por parte do aluno, na confiança no seu próprio conhecimento, além de dignidade cultural, no momento em que vê as suas origens culturais aceites pelo docente e pelos restantes colegas. Desta maneira, igualmente, a família e a cultura deste aluno estão a ser respeitadas (*ibidem*).

Desse modo, Knijnik (2006, p. 22) afirma que:

> *A etnomatemática, ao se propor a tarefa de examinar as produções culturais destes grupos, destacando os seus modos de calcular, medir, estimar, inferir e raciocinar – isto que identificamos, desde o horizonte educativo no qual fomos socializados, como os 'modos de*

> *lidar matematicamente com o mundo' – problematiza o que tem sido considerado como 'conhecimento acumulado pela humanidade'. O que está em questão, aqui, é enfatizar que somente um subconjunto muito particular de conhecimentos é hoje considerado como parte deste acumulo.*

Essas relações percebidas anteriormente evidenciam que a Educação para a Paz pode ser trabalhada nas aulas de matemática. A construção de atividades que sejam do interesse dos alunos e diretamente relacionadas com o seu contexto cultural, permitem e despertam para a reflexão e para a consciência de alguns valores humanos. Pode-se, igualmente, encontrar outra relação entre a Educação para a Paz e a Etnomatemática que é a de possibilitar ao aluno vivenciar o que está a aprender. D'Ambrósio (2001) relata que a aprendizagem apenas irá acontecer quando o aluno puder vivenciar, fazer parte da aprendizagem e não ser apenas um mero receptor. Isso significa que se torna necessário que, na sala de aula, os conteúdos lecionados estejam relacionados com diferentes realidades (económicas, sociais, culturais ou políticas). Afirma-se, assim, a importância da matemática como promotora da Paz, apresentando atividades que procuram fazer o resgate do saber do educando e a contextualização do conteúdo com as suas vivências e com a realidade, não esquecendo de analisar, de forma critica, cada uma delas, em relação à aprendizagem e na construção de valores importantes para os alunos. Segundo D´Ambrósio (2001, pp. 46-47):

> *A proposta pedagógica da Etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo (agora) e no espaço (aqui). E, através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural. Estamos, efetivamente, reconhecendo na educação a importância das várias culturas e tradições na formação de uma nova civilização, transcultural e transdisciplinar. (...) Por tudo isso, eu vejo a Etnomatemática como um caminho para uma educação renovada, capaz de preparar gerações futuras para uma civilização mais feliz. Para se atingir essa civilização, com que sonho e que acredito poder ser alcançada, é necessário atingir a paz, nas suas várias dimensões: individual, social, ambiental e militar, (…). Todos os esforços educacionais devem ser dirigidos para essa prioridade. A Etnomatemática é uma resposta a esse apelo.*

Aproximar o conhecimento matemático teórico da prática

Pires (2008) refere que alguns alunos acusam a matemática escolar de ser demasiado teórica e de não ter aplicações práticas na vida quotidiana e, por esse motivo, perderam o interesse e desmotivaram-se nessa aprendizagem. Esta mesma autora continua a referir que alguns alunos brilhantes noutras disciplinas, falham na matemática e muitas vezes, condicionam a continuação dos estudos e a escolha da área profissional devido a esta aversão e à falta de sucesso nesta disciplina. A educação proporcionada nas nossas escolas e a educação matemática em particular são fundamentais na definição das oportunidades de carreira e para posicionar os indivíduos no mercado de trabalho. No entanto, a generalização de conhecimentos mais abstratos, por oposição aos conhecimentos práticos que são transmitidos, de forma oral, de geração em geração e que ainda estão muito ligados à prática na vivência social e familiar da criança, dificultam esta integração (*ibidem*). Para D'Ambrósio (1985), todas as crianças antes de entrar para a escola, numa determinada idade, apresentam um certo conjunto de conhecimentos matemáticos e estes conhecimentos são uma etnomatemática. No exterior da escola, vão adquirindo outro tipo de conhecimentos matemáticos não formais que também são, segundo o autor, outra etnomatemática: *Antes e fora da escola, quase todas as crianças do mundo se tornam "matematizadas" isto é, desenvolvem a capacidade para usar números, quantidades, a capacidade qualificar e quantificar, e alguns padrões de inferência* (*ibidem*, p. 43). D'Ambrósio afirma que "a matematização «aprendida» elimina o que se chama de matematização «espontânea» (*ibidem*, p. 45). D'Ambrósio pretende acentuar com estas afirmações que, quando a criança entra em contato com a educação formal, existe um momento em que sofre alguma forma de conflito, especialmente se a escola não considerar/contemplar os seus aspetos culturais ou matemáticos que já possui e que foram adquiridos no seu dia-a-dia. Pires (2008) refere que é uma pena desperdiçar a bagagem cultural de cada aluno e não o ajudar a relacionar o que aprende na escola com as suas vivências fora da escola. Acrescenta que a enorme distância entre a teoria e a prática resulta, muitas vezes, da incapacidade dos docentes diagnosticarem o que o aluno "sabe", atenderem ao ambiente cultural/familiar de proveniência e o ajudarem a estabelecer uma ponte entre o que irá aprender e a sua própria experiência exterior à escola.

Apesar da etnomatemática remeter para ideias matemáticas presentes no quotidiano das pessoas, das suas práticas profissionais, de grupos culturalmente identificáveis, isso não significa que a Etnomatemática despreze a matemática escolar (Pires, 2008). Estas ideias seriam matemáticas de um grupo específico – da instituição escola– seriam etnomatemáticas que também merecem ser compreendidas e difundidas em atendimento aos grupos que se interessam por elas. A mesma autora refere que, certamente, uma das aversões dos alunos em relação à matemática está ligada às experiências matemáticas escolares, que enfatizam técnicas de resolução de exercícios e algoritmos, que expressam, talvez, apenas sínteses de uma construção matemática relacionada com as necessidades humanas. Essas construções, em geral não são tratadas, discutidas e valorizadas por muitos daqueles que são responsáveis pela educação matemática nos seus mais diversos níveis. Pires (2008) afirma que a Etnomatemática, com vista à ação pedagógica, procura tornar visível essas construções e não apenas as sínteses. Na sua opinião, é compreensível que as pessoas não se interessem por assuntos que não tenham sentido e significado nas suas vidas e deste modo, defende que a etnomatemática pode contribuir na formação de professores, dado fomentar reflexões, questionamentos e ações sobre as relações constitutivas da matemática enquanto produção humana e como tal, não isenta de interligações culturais. Remata, afirmando que nesta perspetiva, a etnomatemática não se enquadra como uma metodologia de ensino (*ibidem*).

A matemática académica/escolar não perde a sua importância na construção de uma geração criativa e crítica, mas é tida como parte de um conjunto formado por outras matemáticas também importantes para a constituição da nossa sociedade (*ibidem*).

Finaliza-se com uma citação do pai intelectual da etnomatemática D'Ambrósio (2001, p. 82):

> *a adoção de uma nova postura educacional, na verdade a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino-aprendizagem, baseada numa relação obsoleta de causa-efeito, é essencial para o desenvolvimento de criatividade desinibida e conducente a novas formas de relações interculturais, proporcionando o espaço adequado para preservar a diversidade e eliminar a desigualdade numa nova organização da sociedade.*

Segundo Rosa & Orey (2011), a diversidade presente na sala de aula é um dos grandes desafios colocado à escola mas é possível alcançar o sucesso dos alunos se houver o reconhecimento que as experiências de aprendizagem que estes possuem são influenciadas pela cultura. Afirmam ser preciso ter consciência da dissonância entre o conhecimento prévio dos alunos e o conhecimento escolar. Para o docente poder ensinar de forma efetiva, tem de entender e perceber que a aprendizagem dos seus alunos depende das conexões estabelecidas com o conhecimento prévio que levam para a escola (*ibidem*). Estes autores referem que uma prática pedagógica eficiente deve estar enraizada nas rotinas, nas tradições, nas crenças, nas expetativas e nos valores dos alunos, dos professores, dos diretores da escola, dos pais e da comunidade escolar, em geral. Deste modo, para ter melhores práticas de ensino, melhores programas, melhores metodologias e melhores pedagogias para o ensino - aprendizagem da matemática deve-se incluir a integração da cultura e do conhecimento matemático do dia a dia no currículo escolar (*ibidem*). Rosa & Orey (2011) acreditam que a etnomatemática auxilia os docentes e os discentes a dar valor a diversidade cultural, levando–os a entender e a compreender a influência que a cultura exerce sobre a matemática e como esta mesma influência resulta nos vários modos pelos quais as ideias e as práticas matemáticas são comunicadas, transmitidas, difundidas e utilizadas no contexto escolar e quotidiano (*ibidem*). Desta forma, a etnomatemática, torna a aprendizagem mais significativa para o aluno, no sentido de poder utilizá-la em vários aspetos da sua vida, especialmente, em tornar-se um cidadão ativo, participativo e reflexivo na sociedade, respeitando as diferenças entre as culturas e entre os diversos povos, contribuindo para um mundo mais pacífico (*ibidem*). Contudo, Rosa & Orey (2011) não pretendem apresentar a etnomatemática como a solução para os problemas do ensino da matemática, nem supervalorizá-la em detrimento de outras soluções, mas simplesmente, apontar o seu potencial como metodologia de ensino e como campo investigativo de forma a contribuir e incitar a discussão sobre o ensino da matemática.

2.2.10 Investigações nacionais e internacionais sobre etnomatemática

De seguida, apresenta-se algumas investigações nacionais e internacionais que abordam a etnomatemática. Darlinda Moreira, em 2004, apresentou a tese de doutoramento "*Etnomatemática* *e formação de professores*” onde reforçou a ideia de que a formação dos docentes de matemática deve incluir preparação em Etnomatemática, nomeadamente para que os professores possam investigar práticas matemáticas locais para, a partir delas, procurarem formas de construir o seu ensino. Elsa Fernandes, em 2004, na sua tese de doutoramento, estudou a matemática usada pelos serralheiros, e, Gisela Pereira, na tese de doutoramento estudou um grupo de ciganos e a sua relação com a matemática. Eugénia Pires, em 2008, efetou a investigação “*Um estudo de etnomatemática: a matemática praticada pelos pedreiros*”, com o objetivo principal de responder à problemática*: Qual a matemática praticada pelos pedreiros em contexto profission*al. Eliane Santos, em 2009, desenvolveu a investigação “A *etnomatemática da comunidade campestre*”, reconhecendo que o ensino da matemática é conhecido pela distância existente entre o conhecimento desenvolvido no âmbito escolar e as situações vividas no dia a dia dos alunos. Esta investigação incidiu sobre os saberes matemáticos presentes e produzidos numa comunidade campestre no Brasil e procurou identificar os saberes matemáticos dos alunos de uma turma do 3.º ano do ensino fundamental e do professor. Nas atividades diárias e nas brincadeiras dessas crianças, identificou saberes matemáticos relacionados com a contagem e com a manipulação monetária assim como o uso das operações fundamentais nas atividades de auxílio aos pais. A partir da investigação, a autora desenvolveu uma ação pedagógica numa perspetiva etnomatemática. Elisangela Araújo, em 2004, desenvolveu o estudo “E*tnomatemática com geometria sona. Despertando o pensamento matemático dos estudantes em sala de aula*”, com o propósito de mostrar aos futuros e atuais educadores matemáticos que podem fazer e apresentar uma matemática diferente. Para tal, utilizou desenhos da cultura africana da região de Lunda em Angola, enfatizando os conceitos geométricos dos desenhos *Sona* e a sua prática numa turma de 5..ª série, e avaliou os resultados, a partir da sua experiência inicial. Pretendia-se tornar os alunos mais críticos e com espírito de investigação. Joana Latas, em 2010, iniciou a pesquisa “*Uma abordagem etnomatemática em contexto de sala de aula*”, cujo principal objetivo consistiu em compreender o papel da matemática cultural no desenvolvimento da capacidade transversal de comunicação matemática, bem como a predisposição para estabelecer conexões matemáticas, partindo do perfil cultural dos alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade, participantes no estudo. Para tal, utilizou uma abordagem etnomatemática em sala de aula, que foi desenhada e implementada em várias fases, pelos alunos e pela docente de matemática. De uma maneira geral, a autora relata que os seus alunos envolveram-se na experiência matemática cultural, realizando com sucesso a tarefa proposta e refere que o trabalho com aspectos culturais matemáticos suscitou curiosidade nos alunos e foi do agrado destes pelo entusiasmo revelado e evidenciado. Mitchell Evangelista, em 2011, apresentou a dissertação de mestrado intitulada “*As transformações isométricas no Geogebra com a motivação etnomatemática*” onde relata uma investigação que teve como finalidade possibilitar aos alunos do ensino médio, de uma escola pública brasileira, a aplicação e desenvolvimento do conhecimento das transformações isométricas (com a exceção da reflexão deslizante) Para tal, foram utilizados como elementos motivadores a etnomatemática com a geometria *Sona* do grupo étnico africano chamado *Cokwe* e a geometria dinâmica com recurso ao *software* Geogebra. Clecio de Souza, em 2008, efetuou o estudo **"***Programa etnomatemática e a cultura digital*", que teve como ideia central as relações e práticas do meio computacional que podem ser geradas, organizadas e transmitidas, de forma informal, e relacionar com o programa etnomatemática. José Carlos Nogueira, em 2009, na sua dissertação de mestrado "*A etnomatemática no ensino médio e a praxis do professor*" tinha como objetivo compreender melhor os baixos índices de aceitação e de aprovação no ensino de matemática, principalmente nas escolas públicas de um município do Brasil e do ensino médio noturno. Rinaldo Pereira, em 2011, apresentou a dissertação de mestrado *"O jogo africano Mancala e o ensino da matemática em face de lei nº 10.639/03*[9]", onde estudou o ensino de matemática e a implementação da Lei 10.639/03 nesse campo do conhecimento, utilizando o jogo de tabuleiro africano Awalé da família do Mancala[10] como recurso metodológico de ensino e aprendizagem matemática, associado ao ensino da história da cultura africana e afro-brasileira, numa turma com alunos da escola pública do Ensino Fundamental, no Brasil, onde o investigador foi o próprio professor de matemática. A motivação da realização desta pesquisa deu-se pela necessidade de melhorar o desempenho dos seus alunos na sua disciplina e cumprir a referida lei. Para tal, este autor aplicou um conjunto de práticas pedagógicas envolvendo o referido jogo e concluiu que a prática do jogo promoveu aulas interativas e contribuiu para a mudança de postura do docente, em sala de aula, em relação ao reaprender e aprender a ensinar matemática. Promoveu a motivação para a aprendizagem matemática e o aumento da autoestima dos alunos em relação ao conceito de negro, ao ser negro e à sua cultura.

Eliane Santos, em 2008, procurou trazer a cultura africana dos tecidos Kente para a aula de matemática, evidenciando que tais materiais constituem um campo fértil de estudo passíveis de sucitar diversas reflexões sobre os saberes e os fazeres. Refere que existem várias possibilidades educativas - tais como construir um tear, as várias formas de tecer, os elementos de análise e descobertas a partir dos tecidos, estando esse contexto associado a histórias e mitos das comunidades e dos povos que tecem esse tecido. Macedo, Petty & Passos, em 2000, destacaram o potencial do jogo Mancala, onde abordaram algumas implicações psicopedagógicas, que está envolto em raciocínio lógico. Para planear o referido jogo, estas autoras referem, que é preciso

---

9 A lei 10639/03 foi promulgada no Brasil para que os responsáveis pela educação pudessem olhar para o passado e ver na raiz da civilização africana uma forma de contribuir com o ensino e aprendizagem da educação brasileira.

10 O Mancala é um jogo matemático africano, com base lógica, cuja estrutura de movimentos de captura e defesa das peças está pautada por conceitos matemáticos, práticas culturais e filosóficas africanas.

analisar, de forma cuidada o tabuleiro, observando a localização de todas as peças ou as sementes, relativizar o objetivo final (futuro) em virtude de uma ação escolhida como a melhor (presente) e coordenar ataques e defesas em simultâneo. Assim, nesse trabalho, as autoras pretenderam desenvolver os conceitos matemáticos presentes e as operações mentais presentes no jogo mancala.

Até à data, não tenho conhecimento de nenhum estudo feito em Portugal sobre a cultura africana, nomeadamente da *Geometria Sona*.

2.2.11 Educação intercultural e multicultural

Educação intercultural

Segue a definição de educação intercultural e de educação multicultural, os seus objetivos e a diferença entre estes dois termos, sendo que um dos objetivos da etnomatemática é despertar o interesse dos alunos e promover o diálogo sobre aspetos matemáticos presentes nas atividades culturais das sociedades, de grupos minoritários e de etnias que são habitualmente descriminadas. Assim, pretende-se agora refletir um pouco sobre o seu potencial para a educação matemática, que passa pela motivação de todos os alunos, pela promoção da valorização mútua dos alunos de diversas origens culturais distintas, diminuição de sentimentos e preconceitos racistas relativamente às habilidades e contribuições científicas dos povos não europeus. A etnomatemática mostra a Matemática como sendo uma criação humana, pois mostra as necessidades e as preocupações das diferentes culturas, em diferentes momentos da história, ao comparar os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente. O docente tem, igualmente, a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno relativamente ao conhecimento matemático.

As pesquisas etnomatemáticas, dirigidas para a educação, reconhecem as matemáticas praticadas por determinados grupos sociais e que não são condizentes com os padrões académicos e com a história eurocêntrica e assim procuram uma educação mais humanizadora e mais humana, onde os alunos são escutados e a sua matemática apreendida na vida cotidiana é validada: Assim a etnomatemática pode tornar o ambiente no ensino de Matemática mais harmonioso e mais humano, reconhecendo e respeitando a diversidade e as diferenças entre culturas, como é defendido pela educação inter-multicultural. Como D'Ambrosio (2002, p. 19) afirma:

> *Quando se utiliza a Etnomatemática na educação: Procura-se uma educação que estimule o desenvolvimento de criatividade desinibida, conduzindo a novas formas de relações interculturais e intraculturais. Essas relações caracterizam a educação de massa e proporcionam o espaço adequado para preservar a diversidade e eliminar a desigualdade discriminatória, dando origem a uma nova organização da sociedade. Fazer da Matemática uma disciplina que preserve a diversidade e elimine a desigualdade discriminatória é a proposta maior de uma Matemática Humanística. O Programa Etnomatemática tem esse objetivo maior.*

Pedro, Pires & Gonçalez (2007) referem que a melhoria das condições de vida após os primeiros anos de imigração e dos programas de reagrupamento familiar conduziram a que, nos últimos anos, o número de crianças imigrantes tenha aumentado no sistema educativo português. Este fato poderá explicar, por si só, a necessidade crescente de criar espaços escolares para a educação intercultural, uma vez que, a escola surge como local privilegiado de socialização e de aquisição da própria cultura e simultaneamente como forma de interação comunicante com a cultura do outro. No mesmo artigo, os autores referem que a sociedade se alterou no último século de forma radical em relação à estratificação ou destratificação social, na transformação dos papéis que eram habitualmente atribuídos a homens e a mulheres e na democratização do acesso aos recursos materiais, culturais e humanos. Na última década, segundo estes autores, acentuou-se uma característica muito particular das sociedades modernas que é a multiculturalidade, resultado de um conjunto de acontecimentos de cariz diverso mas com profundo impacto na forma como se percepciona o mundo. Estas razões e muitas outras permitem que grupos de pessoas, de diferentes culturas, introduzam novas variáveis na nossa matriz cultural (*ibidem*).

As questões relativas à diversidade cultural passaram, em pouco mais de uma década, a ser um tema presente em todas as escolas. Não é a multiculturalidade das sociedades que se constituiu como novo fator, mas a consciência dessa multiculturalidade que é nova; as trocas comerciais e a coexistência de pessoas de diferentes origens num mesmo espaço geográfico foi uma constante ao longo dos séculos, mas o ritmo da mobilidade aumentou exponencialmente, não sendo alheia a escola (*ibidem*). A sociedade multicultural é uma realidade, um processo irreversível que sempre esteve presente no desenvolvimento das sociedades e o desafio é transformar uma sociedade multicultural numa sociedade intercultural, em vez de um somatório ou sobreposição de culturas que se confrontam ou se toleram no mesmo espaço, viver neste cruzamento de culturas em transformação mútua, numa sociedade com direitos reais e efetivos- direitos cívicos e políticos; direitos económicos; direitos sociais e culturais (*ibidem*).

Objetivos da educação intercultural

Os objetivos de uma educação intercultural são definidos por vários autores e existem várias propostas: alguns salientam o lado internacional da questão, outros salientam o património cultural, a diversidade cultural ou linguística, os problemas do racismo e xenofobia, as questões dos imigrantes e de outros grupos minoritários, ou ainda, as questões da equidade ou alteridade. Segundo Miranda (2004), toda esta problemática reforça a ideia de que a noção de educação intercultural parece ser uma noção complexa, na medida em que foca, de forma simultânea, o problema da diversidade e da desigualdade.

Miranda (2004, pp. 21-22), apoiando-se em dois investigadores espanhóis (Sales e Garcia, 1997) refere como objetivos básicos da educação intercultural:

> *proporcionar e criar condições para a igualdade de oportunidades educativas para participar activamente na sociedade e na transformação da cultura, dentro de uma sociedade*

> *democrática em que se formam novas gerações de cidadãos conscientes e críticos que tomam decisões públicas para o desenvolvimento das estruturas e práticas sociais e culturais; valorizar a diversidade e respeitar a diferença como elemento dinamizador e enriquecedor na interacção entre pessoas e grupos; procurar valores comuns que possam dar sentido à interculturalidade, no sentido de desenvolver ideologias, políticas e modelos educativos num mundo plural, ameaçados por um certo relativismo pós-moderno, através de estratégias comunicativas, sociais e educativas baseadas no diálogo, como forma de intercâmbio de perspectivas culturais e procura de modelos culturais e sociais alternativos; tomar consciência de práticas sociais e educativas que resultam de atitudes/esterotípos étnicos, sexuais ou sociais e desenvolver habilidade afectivas, cognitivas, comportamentais, pessoais e sociais para transformar estas práticas e as estruturas que determinam e legitimam o racismo, para evitar a sua (re)produção; desenvolver competências multiculturais conhecendo, compreendendo e valorizando diferentes percepções culturais que conduzam à superação de um etnocentrismo discriminatório e apoiar o desenvolvimento de uma identidade cultural flexível.*

Pode-se afirmar que a educação intercultural tem como objetivos/competências essenciais: a promoção da compreensão intercultural e internacional, o reconhecimento e o respeito pelas diferenças culturais, pelas questões dos direitos humanos e da cidadania, a garantia da igualdade de oportunidades (o sistema educativo deve favorecer a integração e a inclusão), as estratégias que visem analisar as aptidões, competências e conhecimentos que as crianças trazem consigo e o recurso às mesmas como importantes recursos educativos. A educação intercultural tornou-se, pois, num modelo educativo que favorece o enriquecimento cultural dos cidadãos, partindo do reconhecimento e respeito pela diversidade, através do intercâmbio e diálogo e da participação ativa, consciente e crítica para o desenvolvimento de uma sociedade livre e democrática baseada na igualdade, respeito, tolerância e solidariedade. Note-se, ainda, que ao satisfazer as necessidades educativas essenciais, conferem-se determinadas capacidades a todos os membros da sociedade e que a educação intercultural pode ser vista como um meio de emancipação, nomeadamente, dos grupos mais desfavorecidos (Vieira, 2006).

Ouellet (2002) refere que a educação intercultural tem de estar articulada com a educação para a cidadania, promovendo valores tais a coesão social, ou seja, procura de uma pertença coletiva; aceitação da diversidade cultural; igualdade de oportunidade e equidade; participação crítica na vida democrática; preocupação ecológica. Ferreira (2003) afirma que o conceito "intercultural" implica reciprocidade e partilha na aprendizagem, na comunicação e nas relações humanas, sendo que este conceito não é exclusivo do domínio pedagógico. Diaz-Aguado (2000, p. 20) refere que para alcançar os objetivos propostos da educação intercultural é preciso que: 1) *compreender e respeitar as caracteristicas das outras culturas, reconhecendo o seu valor como forma de adaptação a contextos que, geralmente, também têm sido diferentes; 2) e desenvolver uma identidade baseada na tolerância e no respeito pelos direitos humanos, dentro do qual se deve incluir o respeito pela diversidade cultural*.

Segundo Diaz-Aguado (2000, p. 21), os objetivos da educação intercultural são:

> *1. Adaptar o estilo de ensino-aprendizagem à diversidade dos alunos, superando os obstáculos que conduzem à discriminação, garantindo que todos alcançassem o sucesso escolar sem renunciar à sua própria identidade cultural. 2. Ensinar de forma clara e explícita como se constrói o conhecimento, as normas, as expectativas que estruturam a cultura escolar, para se poderem ultrapassar os problemas do chamado currículo oculto e estimular a participação dos alunos na sua construção. 3. Superar os modelos etnocentricos que a conduziam à rejeição ou subvalorização dos conhecimentos e esquemas de outras culturas. 4. Ajudar a superar a tendência para a procura de certezas absolutas, superando a tolerância e exigindo aprender, a relativizar, na qual se deve compreender que é uma construção nossa.*

Oferecer as mesmas propostas educativas a alunos culturalmente diversificados contribui para excluir e a educação intercultural tenta evidenciar a necessidade de potenciar a diversidade, de entrelaçar culturas, destina-se a fomentar as potencialidades das pessoas e as relações entre os indivíduos, grupos e nações. Segundo Ferreira (2003, p. 100), os principais objetivos desta educação seria o de levar os jovens a: *conhecer e conviver com a diferença; valorizar capacidades específicas e talentos diversificados, sem requerer de todos exactamente o mesmo; preparar para desempenhos múltiplos; gerir a resolução de problemas e de conflitos, ressalvando valores consensuais das diferentes culturas; promover o conhecimento mútuo, a estima responsável e a cordialidade cívica*. Para que estes objetivos sejam atingidos é necessário, antes de mais, criar estratégias de acolhimento e de integração de todos os alunos; mostrar apreço pela língua materna e dialectos dos alunos; recolher, criar, reformular e utilizar material didático multicultural, promover festejos de trabalhos e de expressões multiculturais; trabalhar em cooperação e negociação pedagógica; distribuir estímulos e atenções específicas a todos; autoavaliar o investimento pessoal e o das estruturas escolares na transmissão de autoconfiança (*ibidem*). Assim, segundo Malheiro (2003, p. 101) deverão ser elaborados metodologias: *elaborados projectos de turma, com parcerias nacionais e/ou internacionais; dinamizados círculos de formação em contexto profissional; realizados projectos de investigação-acção*. A educação intercultural fundamenta-se na aceitação da sua identidade própria e no propósito de interagir uns com os outros. Segundo Ouellet (1991), a educação intercultural é toda a formação sistemática que visa desenvolver, nos grupos maioritários e minoritários, uma melhor compreensão das culturas nas sociedades modernas, uma maior capacidade de comunicar entre pessoas de culturas diferentes; atitudes mais adaptadas ao contexto da diversidade cultural, através da compreensão dos mecanismos psico-sociais e dos fatores socio-políticos capazes de produzir racismo, uma maior capacidade de participar na interação social, criadora de identidades e de sentido de pertença comum à humanidade.

Educação multicultural

Segundo Banks (1991, p. 1), definir o conceito de educação multicultural é uma tarefa ampla e complexa que pode ser entendida de forma diversificada, dado as diferentes aproximações teóricas que existem em relação a essa problemática. Todavia, aponta como objetivo central da educação multicultural uma educação para a liberdade. O mesmo autor refere as dimensões da educação multicultural, indicando formas e estratégias que conduzem à concretização desta forma de viver em sociedade e que são: *uma pedagogia para a igualdade de oportunidades, ajudar os alunos a desenvolver atitudes e valores mais democráticos bem como um processo de construção do conhecimento e das suas competências* (*ibidem*, p. 10). O principal objetivo da educação multicultural é a igualdade de oportunidades educativas, independente da sua origem étnica e cultural, social, de género ou qualquer outra. A definição de educação multicultural dada por Carrinton & Short (1989 citada em Cardoso, 2005, p. 11) é que:

> *o conjunto de estratégias organizacionais, curriculares e pedagógicas, ao nível do sistema, de escola e de classe, que expressem a diversidade de culturas e estilos de vida e visem promover a compreensão, o respeito e a interdependência democrática entre alunos de diversas origens étnico-culturais, raciais, sociais e outras, eliminando formas e discriminação e opressão, quer individuais quer institucionais.*

Este tipo de educação implica o envolvimento de todos - políticos, gestores escolares, docentes, família e comunidade. A educação multicultural baseia-se, acima de tudo, na qualidade dos processos educativos e nas atitudes reflexivas de todos os envolvidos, principalmente dos docentes. Ferreira (2003) refere que a finalidade da educação multicultural é dar ao aluno a possibilidade de fomentar o espírito crítico e adquirir os conhecimentos necessários para que possa participar, de forma efetiva, numa sociedade democrática pluralista. Banks (1994) identifica cinco dimensões da educação multicultural: a integração de conteúdos; o processo de construção do conhecimento; a redução de preconceitos; uma pedagogia igualitária; uma cultura de escola e uma estrutura social que suporte o desenvolvimento da educação multicultural. Este autor afirma que a educação multicultural é um movimento de reforma da educação e um processo, que procura criar igualdade de oportunidades para todos os alunos, principalmente para aqueles que pertencem a grupos étnicos, raciais e sociais (*ibidem*).

2.3 Ensino da Geometria

2.3.1 Geometria no ensino básico

Muitos professores não se sentem confortáveis com a geometria, encarando-a como pouco importante no desenvolvimento de competências matemáticas. A par desse aspeto, a formação em geometria tem sido pouco valorizada por muitos professores e, frequentemente, a abordagem da geometria nos manuais escolares é muito pobre (Velosa, 2008). A mesma autora afirma que a investigação em educação matemática reconhece que promover a compreensão da geometria tem implicações noutras áreas do currículo pela possibilidade de se estabelecerem conexões entre diferentes áreas da matemática, favorecendo uma construção mais sólida do conhecimento matemático. Por exemplo, *medida e geometria* estão intimamente ligadas ao desenvolvimento de conceitos como perímetro, área e volume. A noção geométrica de semelhança é indissociável do estudo da proporcionalidade e confere uma dimensão única à sua compreensão. As transformações de figuras, tais como a rotação, a translação, a reflexão e a reflexão deslizante, bem como a simetria são essenciais para olhar e compreender o mundo que nos rodeia.

Breda *et al*. (2011) afirmam que a geometria é uma área da matemática fundamental para o dia a dia dos cidadãos a que a escola, no entanto, não tem dado a devida atenção. A geometria é normalmente deixada para o final do ano letivo e tratada a partir das definições, dando pouco espaço à ação dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos. Acompanhando o desenvolvimento dos currículos que tem vindo a acontecer no panorama internacional, o atual programa de matemática do ensino básico (Ponte *et al*., 2007) procurou inverter esta situação ao propor como ideia central em geometria, ao longo dos três ciclos, o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. Um outro aspeto a destacar prende-se com a introdução desde o 1.º ciclo das transformações geométricas, inicialmente, de modo informal, e depois com uma progressiva formalização até ao 3.º ciclo. Também a noção de simetria de uma figura é clarificada e trabalhada neste programa, ganhando importância na caraterização dos objetos geométricos (Ponte *et al.*, 2007).

De facto, o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) indica que todos os alunos devem estar aptos para realizar construções geométricas, para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico, para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática, para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial. Além disso, os alunos devem estar predispostos para procurar e explorar padrões geométricos e investigar propriedades e relações geométricas. Finalmente, Velosa (2008) refere que faz parte das finalidades da geometria, das grandezas e da medida, desenvolver nos alunos a sensibilidade para apreciar esta área da Matemática no mundo real e o reconhecer e usar as ideias geométricas nas mais variadas situações, por exemplo, na comunicação.

Esta mesma autora refere que a importância dada à geometria no currículo matemático, nos documentos oficiais da última reforma curricular e em todos os níveis de ensino, atualmente, é notória e visto que a matemática faz parte de um património cultural que é determinante na organização da nossa sociedade, torna-se importante que os alunos contactem com esse património. Como tal, a geometria que deve ser ensinada na escola, ao longo de todos os ciclos, deve ser aquela que nos permite interpretar e intervir no espaço em que vivemos. Esta *inclui a visualização de objectos, a sua representação, a manipulação dessas representações e a criação de novos objectos; inclui também a resolução de problemas de aplicação da Geometria a situações da vida real, a sua ligação à arte, etc*. (Veloso, Fonseca, Ponte & Abrantes, 1999, p. 70). Nesta perspetiva, o currículo não deverá ser organizado em torno de conceitos geométricos (polígonos, circunferência e círculo, áreas e volumes) pois não revela utilidade para o aluno, isto porque só fará sentido quando for aprendido pelo aluno num contexto de aplicação, intervenção no espaço em que vive; daí se falar no desenvolvimento de competências matemáticas (Velosa, 2008).

Ao efetuar uma breve análise das orientações curriculares presentes nos documentos ME-DGEBS (1991) e ME-DEB (2001) e das formuladas em Ponte *et al*. (2007), percebe-se a importância da geometria no currículo de matemática. Por outro lado, é sabido, que, apesar de a geometria ser uma área muito importante, tem-se revelado muito problemática, sendo muito discutível a forma como é abordada. Dentro do domínio temático da geometria, as transformações geométricas assumem um papel de relevo ao longo de todos os ciclos (ME-DGEBS, 1991; ME-DEB, 2001). Também o programa reajustado (Ponte *et al.*, 2007) salienta a importância dessa área e a necessidade de a tratar em todos os ciclos de forma progressiva, adequada à maturidade dos alunos.

Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um processo de ensino e aprendizagem fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares (Abrantes, 1999). Ainda de acordo com Abrantes, em geometria há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula sem necessidade de um grande número de pré-requisitos, permitindo contrariar a conceção tradicional que os alunos têm da matemática e que está associada à execução de algoritmos e em "receitas" para resolver exercícios-tipo. Segundo o mesmo autor, a riqueza e variedade da geometria constituem, de facto, argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática, relevando, em particular, que:

- a relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas encontra na geometria inúmeros exemplos e concretizações.
- a geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades.
- as atividades de investigação em geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspetos essenciais da natureza da própria Matemática: formular e resolver problemas, fazer conjeturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adotar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática.

Além disso, a geometria oferece numerosas ocasiões para se conhecerem exemplos sugestivos da história e da evolução da Matemática.

- explorações e investigações em geometria podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento, tendo este facto implicações curriculares evidentes.

Geddes (2001) afirma que a aprendizagem significativa da geometria está diretamente relacionada com o meio ambiente que rodeia os alunos e não com uma aprendizagem que privilegia a memorização de definições, fórmulas e enumeração de propriedades de figuras. Matos & Serrazina (1996) destacam que a aprendizagem da geometria, deve desenvolver nos alunos determinadas capacidades tais como:

- capacidade de visualização – relacionada com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, tendo capacidade para interpretar e modificar as transformações dos objetos;
- capacidade de verbalização - relacionada com a forma como os alunos trocam ideias, negoceiam significados e desenvolvem argumentos. No desenvolvimento desta capacidade é crucial a realização de um confronto de ideias na turma, sobre o trabalho elaborado de cada um, para se conseguir um aperfeiçoamento de todo o trabalho realizado;
- capacidade de construir ou manipular objetos geométricos, dado que a construção material de objetos (sólidos geométricos) e o desenho geométrico usando a régua e o compasso, ou mesmo, a construção no computador são matematizações do real que possibilitam aos alunos compreender e interagir com ideias geométricas;
- capacidade de organização lógica do pensamento matemático, que tem a ver com a forma como os alunos estruturam o pensamento geométrico, desde a visualização de figuras, que são reconhecidas por este pela sua aparência, até a um nível superior onde compreendem os diversos sistemas axiomáticos para a geometria;
- capacidade respeitante à aplicação dos conhecimentos geométricos noutras situações e que deve ser desenvolvida com a realização de atividades geométricas.

Um dos problemas enfrentados pelos professores de matemática, em especial, os do ensino básico, é dar à sua prática um caráter mais lúdico e menos formal, de maneira que desperte nos alunos o interesse e o gosto pela matemática, fazendo com que a aprendizagem, de facto, efetivamente aconteça. Esse é um dos objetivos da Educação Matemática, que procura através de metodologias inovadoras transformar o aluno *de mero espectador a um criador ativo, não numa perspectiva de ser um cientista, mas que participe, compreenda e questione o próprio conhecimento* (Mendes, 2006, p. 9). Nessa perspetiva, a natureza das atividades propostas em sala de aula tem um papel determinante e contribui de maneira positiva para a interação e a participação dos alunos na construção do conhecimento. Compreender os conceitos de geometria, as suas propriedades e relações, são alguns dos conhecimentos básicos fundamentais para que os alunos interajam adequadamente com o seu meio e consequentemente iniciem o estudo dessa matéria. Entretanto, para que essa compreensão aconteça, é necessário que o aluno experimente esses conceitos através de construções geométricas. De acordo com o novo programa de matemática (Ponte *et al*., 2007), o trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Neste sentido, deve-se destacar a importância das transformações geométricas (e das isometrias, em particular), as quais permitem o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, como por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. A partir dessas considerações, os professores devem propor atividades que conduzam ao conceito de transformação geométrica e no desenvolvimento das atividades poderá ser utilizado papel quadriculado, papel manteiga, régua, lápis, borracha, alfinetes, transferidor e compasso.

Velosa (2008) refere que o ensino da geometria é da maior importância, devendo desenvolver a intuição geométrica e raciocínio espacial nos alunos, assim como capacidades para explorar, conjeturar, raciocinar logicamente, formular e resolver problemas abstratos ou numa perspetiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver capacidades de organização e de comunicação oral e escrita. Aconselha que os alunos utilizem linguagem matemática rigorosa para explicarem as estratégias de resolução de problemas, para descreverem os seus raciocínios e para registarem as conclusões. Na geometria plana e do espaço, a prática de manipulação e observação de figuras e modelos assume um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. É aconselhável que os alunos manipulem, observem, comparem, descubram, construam, passando do espaço ao plano e do plano ao espaço durante a aprendizagem (*ibidem*).

No Programa de Matemática do Ensino Básico recomenda-se que o ensino da geometria no 1.º e 2.º ciclos tenha por base a exploração, manipulação e experimentação de materiais e o estabelecimento de estimativas de medidas de grandezas. No 3.º ciclo é recomendada a introdução de pequenas cadeias dedutivas na exploração de problemas geométricos. É fundamental que as diversas transformações geométricas sejam estudadas logo no 1.º ciclo, inicialmente de forma intuitiva e depois com crescente formalização. Esta componente constitui mais uma alteração significativa ao programa anterior, tendo sido o tópico que mais alterações sofreu desde os programas de 1991 até ao presente (Ponte *et al*., 2007). Neste programa, os instrumentos de desenho e de medida e a utilização de materiais manipuláveis são recursos fundamentais de apoio para a aprendizagem da geometria. Paralelamente, o uso de programas computacionais de geometria dinâmica e de *applets*, oferecem aos alunos amplas possibilidades para desenvolver a compreensão dos conceitos e relações geométricas (*ibidem*).

O programa anterior do 3.º ciclo, refere que o estudo da geometria deve assentar em propostas de trabalho que impliquem *medições, construções, comparação e transformação de figuras, identificação dos seus elementos, reconhecimento de propriedades, resolução de puzzles geométricos, etc.*. (ME-DGEBS, 1991, pp. 179-180). Esse programa salienta também a importância da observação e da intuição como condição necessária para o desenvolvimento gradual de raciocínios indutivos e dedutivos, a par da realização de experiências, da resolução de problemas por construção; a justificação de processos, raciocínios, conjeturas e conclusões. Privilegia, igualmente, o desenvolvimento do conhecimento do espaço, tendo sempre como padrão de referência a análise de figuras. Em consonância com as finalidades enunciadas são definidos objetivos gerais de aprendizagem por ciclo que se apresentam na tabela 2.1.

Objetivos gerais de aprendizagem para a geometria no NPMEB		
1.º ciclo	**2.º ciclo**	**3.º ciclo**
- Desenvolver a visualização e ser capaz de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e identificar propriedades que as caraterizam	- Compreender propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço; - Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar.	- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de o usar; - Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço.
- Ser capaz de identificar e interpretar relações espaciais.	- Ser capaz de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria.	- Compreender e ser capaz de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos; - Desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças.
- Compreender as grandezas dinheiro, comprimento, área, massa, capacidade, volume e tempo; • Compreender o que é a unidade de medida e o processo de medir; •Ser capaz de realizar estimativas e medições, e de relacionar diferentes unidades de medida.		- Compreender a noção de demonstração e ser capaz de fazer raciocínios dedutivos.
- Ser capaz de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema.	- Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos.	- Ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos.

Tabela 2.1: Objetivos gerais de aprendizagem para a geometria, nos três ciclos do ensino básico, no NPMEB (Ponte *et al*., 2007)

Focando a atenção em tópicos relacionados com as isometrias, refira-se que no 1.º ciclo é introduzida a ideia de reflexão como simetria axial e a noção de friso, sendo que ao nível das orientações metodológicas se recomenda ao professor que proponha a exploração de frisos *identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta)* (Ponte *et al*., 2007, p. 22). Tal orientação remete para a abordagem, ainda que pouco formalizada, de outro tipo de simetrias e, consequentemente, viabiliza a ampliação da ideia de simetria. No 2.º ciclo, aprofunda-se o estudo das isometrias, introduzindo-se as noções e propriedades da reflexão, da rotação e da translação e os conceitos de simetria axial e rotacional. Neste âmbito, surgem, entre outros, os seguintes objetivos específicos de aprendizagem:

- Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado.

- Construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias.

- Compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar assimetrias numa figura.

- Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias.

- Identificar as simetrias de frisos e rosáceas.

No 3.º ciclo, partindo do que já foi realizado, os alunos alargam e sistematizam este estudo, e aprofundam o conceito de translação associando-o a vectores (*ibidem*, p. 51). Para além disso, deverão também ser trabalhadas com maior profundidade as propriedades das isometrias, designadamente, *reconher as propriedades comuns das isometrias e reconhecer ´que a translação é a única a isometria que conserva direções* (ibidem, p.53).

2.3.2 Sentido espacial

No corpo do programa de Matemática do Ensino Básico pode ler-se que a finalidade principal da inclusão da geometria como um dos grandes temas da matemática escolar se prende com a importância que é atribuída ao desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, clarificando-se que na base deste estão a visualização e a compreensão das relações espaciais.

> *A visualização engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia, e envolve observação, manipulação e transformação de objectos e suas representações, e a interpretação de relações entre os objectos e entre estes e as suas representações. O sentido espacial envolve ainda as noções de orientação e movimento, desempenhando um papel importante na percepção das relações espaciais* (Ponte *et al*., 2007, p. 20).

Breda *et al*. (2011) afirmam que as crianças adquirem muitas noções acerca do espaço quando se movimentam no seu ambiente natural e quando interagem com os objetos. As suas experiências iniciais são sobretudo espaciais e o sentido espacial vai-se desenvolvendo através da experiência e da experimentação em atividades espaciais concretas. Assim, quando as crianças chegam à escola, estas possuem muitas noções intuitivas acerca de espaço e um vasto conhecimento das formas, que é preciso continuar a desenvolver. O NCTM (1991, p.61) sistematiza a ideia de sentido espacial nestes termos:

> *O sentido espacial é um conhecimento intuitivo do meio que nos cerca e dos objectos que nele existem. Para desenvolver o sentido espacial são necessárias muitas experiências que incidam: nas relações geométricas, na direcção, orientação e perspectivas dos objetos; e no modo como uma modificação numa forma se relaciona com uma mudança no tamanho.*

Portanto, o sentido espacial pode ser descrito como uma intuição sobre as formas e as suas relações e inclui a habilidade para visualizar mentalmente objetos e relações espaciais. As experiências geométricas, diversificadas e ricas, são indispensáveis para o desenvolvimento do sentido e do raciocínio espacial de cada pessoa. As primeiras tarefas de geometria a proporcionar aos alunos devem incidir nos raciocínios sobre as formas, no plano e no espaço, e sobre as transformações que se podem operar nessas formas. Matos & Gordo (1993) partindo de vários contributos da investigação, afirmam que desenvolver a visualização espacial implica dar atenção a um conjunto de sete capacidades: coordenação visual motora; memória visual; percepção figura-fundo; constância perceptual; percepção da posição no espaço; percepção das relações espaciais e discriminação visual. Este conjunto de capacidades está relacionado com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeiam e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos, que serão exploradas mais adiante. Estas capacidades estão diretamente relacionadas com a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia e com a capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos (Breda *et al*., 2011).

Ponte & Serrazina (2000) referem sete capacidades relacionadas com a visualização espacial, que estão resumidas na tabela 2.2:

Capacidades relacionadas com a visualização espacial (Ponte & Serrazina, 2000)	
Capacidades	**Descrição**
Coordenação visual-motora	Capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo
Percepção figura-fundo	Capacidades de identificar figuras geométricas em desenhos complexos
Memória visual	Capacidade de recordar objetos que já não estão à vista
Constância perceptual	Capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas e/ou diferentes posições
Percepção da posição no espaço	Capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes
Percepção das relações espaciais	Capacidade de ver ou imaginar dois ou mais objetos em relação consigo próprio ou em relação connosco
Discriminação visual	Capacidades para identificar semelhanças ou diferenças entre objetos

Tabela 2.2: Capacidades relacionadas com a visualização espacial (fonte: Ponte & Serrazina, 2000)

Portanto, podemos falar de sentido espacial como uma ideia ampla que inclui o desenvolvimento de capacidades de visualização, de conhecimentos de geometria e de atitudes de observação e de atenção pelos objetos. Para além do desenvolvimento do sentido espacial, são também propósitos principais do ensino da geometria no ensino básico: a compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, a compreensão das transformações geométricas; a compreensão da noção de demonstração e utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos (Ponte *et al.*, 2007).

2.3.3 A Teoria de Van Hiele

Quando se reflete sobre o ensino e aprendizagem da geometria é incontornável falar na Teoria de Van Hiele, desenvolvida em meados século XX por Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele, que estabelece uma aprendizagem progressiva da geometria em cinco níveis cada vez mais complexos, progressão essa estreitamente relacionada com as tarefas propostas aos alunos. A ideia básica é a de que a aprendizagem da geometria implica passar por determinados níveis de pensamento e de conhecimento, níveis esses que não estão associados à idade e que só depois do aluno ter atingido um determinado nível poderá passar ao seguinte (Nasser *et al.*, 2000). A Teoria de Van Hiele sugere que enquanto os alunos aprendem geometria, estes progridem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, onde cada nível é caraterizado por uma relação entre os objetos de estudo e a linguagem. Apesar de esse modelo ser hierárquico, obedecendo a uma sequência, como se estivesse reforçando a aprendizagem da geometria exclusivamente das partes para o todo, do particular para o geral, sufocando a visão global, ele aponta as lacunas de aprendizagem que o aluno apresenta e assim o professor poderá organizar-se, de forma criativa, na sua prática pedagógica para facilitar a aprendizagem do aluno, estabelecendo estratégias metodológicas que favoreça a resolução de problemas e a interdisciplinaridade numa visão não linear (*ibidem*).

Na Teoria de Van Hiele são apresentados cinco níveis de aprendizagem da geometria: visualização, análise, ordenação, dedução e rigor. No nível da visualização, os alunos adquirem uma conceção do espaço à sua volta, reconhecendo as figuras apenas pela sua aparência. No nível de análise são reconhecidas partes das figuras, passando estas a ser identificadas pelo conjunto das suas propriedades. O nível seguinte, denominado ordenação ou classificação, pressupõe que o aluno ordene de modo logico as propriedades das figuras e reconheça classes de figuras. O nível de dedução implica que os alunos entendam a geometria como um sistema dedutivo, e sejam capazes de deduzir as propriedades de uma figura. Quanto ao nível de rigor, os alunos são capazes de trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos e estabelecer diferenças entre os objetos e a sua essência. (Nasser *et al*., 2000; Ponte & Serrazina, 2000).

2.3.4 Isometrias e simetrias no currículo do ensino básico

2.3.4.1 Isometrias

Especificamente, focalizando o processo de ensino e aprendizagem de isometrias no Ensino Básico, define-se a seguir, reflexão, translação, reflexão deslizante e rotação e apresentam-se alguns exemplos.

Transformações geométricas

No estudo da geometria, as transformações geométricas desempenham um papel importante, pois facilitam uma outra perspetiva através da qual os objetos geométricos podem ser analisados e interpretados. Os alunos deverão aprofundar, ao longo dos anos de escolaridade obrigatória, conhecimentos sobre transformações geométricas, explorando alguns dos movimentos que se associam às translações, reflexões, reflexões deslizantes e rotações, tornando-os mais formais e sistematizados (NCTM, 2007). As transformações revelam-se igualmente úteis para auxiliar os alunos a compreender o conceito de semelhança e de simetria. Daí que constituam um tópico central do ensino da geometria no novo programa de matemática de 2007. Como salienta Abrantes *et al.* (1999), as experiências com transformações geométricas, podem iniciar-se com a observação de figuras simétricas, congruentes ou semelhantes. O uso de software pode contribuir para ampliar as representações dos alunos, quando, por exemplo, deslizam, rodam, ampliam ou reduzem uma figura. A utilização do computador e em particular dos programas de geometria dinâmica é recomendada por vários autores (NCTM, 2007; Ponte *et al*., 2007; Cabrita *et al*., 2009; Breda *et al*., 2011).

Dâmaso, Lima, Costa, Pacheco, Simões, Lima & Raposo (2010) referem que a humanidade tem usado a noção de isometria nas suas diversas criações desde os tempos mais primitivos. De facto, desde há muito que as isometrias são utilizadas na composição de objetos artísticos e nos ornamentos, desempenhado um papel especial nas nossas vidas pela beleza e harmonia que encerram. Povos da Antiguidade utilizaram figuras geométricas como elementos decorativos e, com o desenvolvimento das civilizações, as figuras adquiriram disposições mais complexas, surgindo, assim, os ornamentos com repetições de uma mesma figura geométrica, tais como as rosáceas, frisos e pavimentações. Outros testemunhos estão presentes em obras arquitetónicas, em ornamentos indígenas, no artesanato, entre outros (Biembengut & Hein, 2000). De acordo com Barbosa (1993), muitos mosaicos encontrados em pisos, tetos e painéis de parede, de templos ou palácios, atestam a íntima relação entre determinados padrões geométricos e a arte da decoração, sendo possível dizer que o objetivo de alguns artífices era o de encontrar uma simetria ornamental com o emprego de figuras simples, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso e estético.

No que concerne ao ensino da matemática em Portugal, Eduardo Veloso, em 1998, afirmava que era crucial retomar a intenção de dar às transformações geométricas o seu papel importante no ensino da geometria. Bastos (2007, p. 23) defendia que *justificar-se-ia que se desse muito maior importância às transformações geométricas, em primeiro lugar pela relevância que elas têm tido na história da matemática recente (...) mas também porque constituem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço.*

É consensual aceitar que uma isometria é uma transformação geométrica que preserva as distâncias (entre os pontos). Esta definição remete para a possibilidade de transformar uma figura geométrica noutra que lhe é geometricamente igual. De facto, as isometrias possuem as seguintes propriedades: a imagem de um segmento de reta é um segmento de reta com o mesmo comprimento do objeto inicial; a imagem de um ângulo é um ângulo com a mesma amplitude do primeiro (preserva a amplitude dos ângulos). Como consequência da definição, a imagem de uma figura F por uma isometria é uma figura F` congruente a F. O conceito isometria está estreitamente ligado ao de simetria. Diremos que uma figura é simétrica quando existir pelo menos uma isometria que a deixe invariante, isto é, que a levam a coincidir consigo mesmo (Breda *et al*., 2011).

Assim, segundo Breda *et al.* (2011), uma isometria ou movimento rígido é um caso particular de uma transformação geométrica que tem a particularidade de conservar as distâncias entre os pontos. Ou seja, se *f é* uma isometria e *P* e *Q* dois pontos quaisquer, tem-se que $d(P,Q)=d(f\,(P), f\,(Q))$, isto é, a distância entre esses dois pontos P e Q do plano, é a mesma que entre os seus transformados, $f(P)$ e $f(Q)$. Prova-se que existem apenas quatro tipos de isometrias no plano: a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão deslizante. A translação e a rotação de amplitude 180.º são as únicas isometrias que transformam uma reta noutra reta que lhe é paralela, ou seja, que conservam a direção. Relativamente ao sentido dos ângulos orientados, apenas a translação e a rotação o mantêm.

Segundo Breda *et al.* (2011), se uma isometria transforma qualquer ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado positivamente (negativamente), neste caso diz-se uma isometria direta. Se uma isometria transformar um ângulo orientado positivamente (negativamente) num ângulo orientado negativamente (positivamente), neste caso a isometria diz-se inversa ou oposta. Segue, de imediato, segundo os mesmos autores, que:

1. *A composição de isometrias diretas é uma isometria direta;*
2. *A composição de um número ímpar de isometrias opostas é uma isometria oposta;*
3. *A composição de um número par de isometrias é uma isometria direta*. (*ibidem*)

Uma das isometrias fundamentais é a reflexão e são as reflexões que geram todas as isometrias do plano. Por outras palavras, pode-se obter qualquer isometria do plano por composição de reflexões. Qualquer isometria é a composição de no máximo de três reflexões (Breda *et al*., 2011). A partir desta propriedade podemos concluir que, dadas duas figuras geometricamente iguais, existe sempre uma isometria do plano (ou uma composição de isometrias) que transforma uma na outra. Estas figuras chamam-se figuras isométricas.

Reflexão

Segundo Breda *et al*. (2011, p. 77), seja l uma reta do plano. A reflexão de eixo l, R_l, é a transformação do plano que: fixa cada ponto de l, isto é, R_l (P)=P para todo o ponto P em l, e transforma cada ponto Q que não pertence a l num ponto Q´ (distinto de Q) situado na reta perpendicular a l que passa por Q e que está a uma distância do ponto de interseção das duas retas igual à distância a que Q está desse mesmo ponto.

Uma reflexão deixa invariante uma reta **-** a reta de reflexão. Os pontos que não pertencem a essa reta mudam de semiplano e a reta de reflexão comporta-se como um espelho de dupla face (*ibidem*, p. 78).

Figura 2.1: Reflexão numa borboleta

Figura. 2.2: Reflexão de um monumento na superfície da água

Segundo Lopes & Nasser (1996, p. 102), uma figura é a reflexão de outra se: (*i) a linha que une cada par de pontos correspondentes é perpendicular ao eixo de reflexão e (ii) dois pontos correspondentes estão à mesma distância do eixo de reflexão, em lados opostos*.

A reflexão transforma cada figura F noutra F´ congruente a F. Entretanto, a reflexão inverte a orientação da figura, como se ilustra na figura 2.3, na qual o triângulo [ABC] foi transformado em [A`B`C`] .

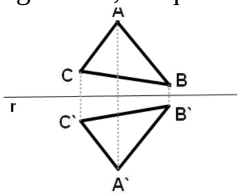


Figura 2.3: Reflexão do triângulo [ABC] segundo o eixo de reflexão r

O reflexo de um objeto no espelho é o próprio objeto, porém invertido, como se o espelho fosse o eixo de reflexão. Um outro exemplo pode ser visto nas ambulâncias, nas quais a palavra ambulância é escrita invertida para que possa ser vista, nos retrovisores, da forma não invertida. Uma figura pode ter vários eixos de reflexão ou nenhum eixo (neste caso, dizemos que ela não possui simetria de reflexão). Um triângulo equilátero possui três eixos de reflexão, mas no entanto, num paralelogramo não é possível identificar nenhum eixo de reflexão, pois ao "dobrar", por exemplo, o paralelogramo pela reta r, as suas partes não coincidem por sobreposição.

Da definição de reflexão, decorrem as seguintes propriedades:

1. *As reflexões são transformações do plano que preservam distâncias sendo, portanto, isometrias.*
2. *Por serem isometrias, as reflexões preservam retas, semi-retas, segmentos de reta, amplitudes de ângulos e as relações de paralelismo e perpendicularidade entre retas.*
3. *As reflexões fixam pontualmente o eixo de reflexão e fixam, embora não pontualmente, qualquer reta perpendicular ao eixo de reflexão.*
4. *As reflexões são isometrias negativas por transformarem ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados negativamente (positivamente) (ibidem)*

Como a composição de duas isometrias negativas é uma isometria direta ou positiva, pode-se, de imediato, concluir que a composição de duas reflexões nunca é uma reflexão e por conseguinte a operação composição usual de funções não confere ao conjunto das reflexões uma estrutura de grupo (*ibidem*)**.**

Translação

Dado um vetor u chama-se translação definida por este vetor a uma transformação geométrica, tal que cada ponto O do plano é transformado num ponto O’ tal que O’ = O + u (Breda *et al*., 2011).
A figura 2.4 mostra a translação determinada pelo vetor v aplicada a um triângulo [ABC]:

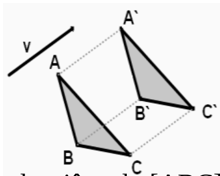


Figura 2.4 Translação do triângulo [ABC] associada ao vetor v

A composição de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação e o recíproco também se verifica, isto é, toda a translação é composição de duas reflexões de eixos paralelos.

Propriedades da translação:

1. *A translação é uma transformação do plano que preserva distâncias sendo, portanto, uma isometria.*
2. *Uma translação distinta da transformação identidade, não tem pontos fixos.*
3. *A translação fixa qualquer reta com a direção do vetor u (embora não pontualmente) e transforma cada reta numa reta que lhe é paralela. Por outras palavras, a translação preserva direções.*
4. *A translação é uma isometria positiva, isto é, transforma ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados positivamente (negativamente). (Breda et al., 2011)*

Exemplos simples de translação podem ser vistos em muitos trabalhos manuais e artesanais, como por exemplo, nas amostras de trabalhos de croché e nos bordados, entre outros. Nestes, os motivos repetem-se ao longo do trabalho.

Rotação

Segundo Breda *et al*. (2011, p. 84), a rotação de centro no ponto O e ângulo orientado de amplitude α é a transformação do plano, R_O, que, fixa O, isto é, $R_o(O)= O$ e transforma cada ponto P, distinto de O, num ponto P`=R_O (P), situado na circunferência de centro O e raio d(O, P), tal que a medida do ângulo orientado POP´, que tem por lado-origem a semirreta OP e lado-extremidade a semirreta, OP´, tem amplitude α.
Nos logotipos/logomarcas apresentados na figura 2.5, podemos observar, no primeiro logótipo, cinco rotações cujas amplitudes são de 72.º, 144.º, 216.º, 288.º e 360.º. No segundo logótipo temos seis rotações cujas amplitudes são de 60.º, 120.º, 180.º, 240.º, 300.º e 360.º; e no último logótipo temos três rotações de amplitude 120.º, 240.º e 360.º, respetivamente.

Figura 2.5: Logótipos com diferentes simetrias de rotação

Uma rotação pode acontecer em dois sentidos: considera-se “sentido positivo” quando é anti-horário (movimento contrário ao dos ponteiros do relógio) e o “sentido é negativo” quando é igual ao do movimento dos ponteiros de um relógio (sentido horário).

Propriedades da rotação:

1. *A rotação é uma transformação do plano que preserva distâncias sendo, portanto, uma isometria.*
2. *Uma rotação, distinta da transformação identidade, fixa um e um só ponto e fixa uma reta (não pontualmente) se e somente se a sua amplitude for de 180º e o centro da rotação pertencer à reta. As rotações de amplitude de 180º são usualmente designadas por meias voltas.*
3. *Uma rotação fixa circunferência com centro da rotação, embora não pontualmente. Apenas a (rotação) identidade fixa pontualmente circunferências.*
4. *A rotação é uma isometria direta, isto é, transforma ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados positivamente (negativamente). (Breda et al, 2011)*

Seguem-se alguns exemplos de movimentos de rotação. A ideia de rotação também está presente na natureza, nas flores (figura 2.6), na estrela do mar (figura 2.7) entre outros.

Figura 2.6: Rotação na flor (fonte: Oliveira, 2000)

Figura 2.7: Estrela do Mar (fonte: Ripplinger, 2006)

A partir da rotação de triângulos isósceles é possível construir polígonos regulares. Tome-se um triângulo isósceles [ABC] de base [BC], ângulo de vértice A com amplitude a (sendo a divisor de 360º). Ao rodar o triângulo [ABC] considerando A o centro de rotação e a a amplitude da rotação, o segmento AB coincidirá com AC, repetindo esse movimento sucessivamente obteremos polígonos regulares (figura 2.8).

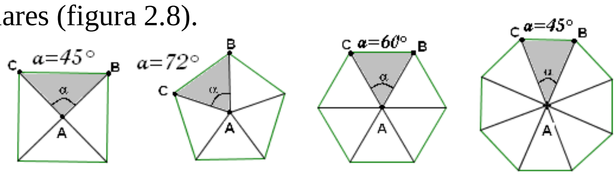


Figura 2.8: Construção de polígonos regulares por rotações

Pelo exposto, adota-se a seguinte definição de rotação: Rotação de centro *O* e amplitude α é uma transformação geométrica tal que: (1) qualquer que seja o ponto *P* do plano, a distância de O a P é igual à distância de O a P’ (imagem de P); (2) a amplitude do ângulo orientado definido por P, *O* e *P*’ é igual a α.

Reflexão deslizante

Chamamos reflexão deslizante de eixo n, quando se obtém por composição de uma reflexão de eixo n com uma translação segundo um vetor u (não nulo) com a direção de n (Breda *et al*., 2011).

Seguem-se dois exemplos (figura 2.9 e 2.10) onde está presente a reflexão deslizante:

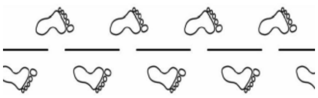


Figura 2.9: Caminhar

Figura 2.10 Helicónia

Propriedades da reflexão deslizante:

- A reflexão deslizante preserva distâncias sendo portanto uma isometria.
- A reflexão deslizante não tem pontos fixos.
- A reflexão deslizante de eixo n fixa n (embora não pontualmente).
- Se P é um ponto do plano e P`é o seu transformado por uma reflexão deslizante, então o ponto médio do segmento de reta [P, P'] pertence à reta n.
- A reflexão deslizante é uma isometria negativa, isto é, transforma ângulos orientados positivamente (negativamente) em ângulos orientados negativamente (positivamente).
- A composição de duas reflexões deslizantes não é uma reflexão deslizante, pelo que a operação composição usual de funções não confere ao conjunto das reflexões deslizantes uma estrutura de grupo. (Breda et al., 2011)

Na tabela 2.3 apresenta-se a classificação das isometrias do plano tendo em consideração o número de pontos que fixam e o seu comportamento quanto à preservação ou inversão de ângulos orientados (Breda *et al.*, 2011).

Classificação das isometrias do plano tendo em consideração o número de pontos que fixam e o seu comportamento quanto à preservação ou inversão de ângulos orientados		
Pontos fixos	**Orientação**	**Classificação**
Pelo menos 2	Preserva	Identidade
Pelo menos 2	Inverte	Reflexão
1 e só 1	Preserva	Rotação (distinta da identidade)
0	Preserva	Translação (distinta da identidade)
0	Inverte	Reflexão deslizante

Tabela 2.3: Classificação das isometrias do plano tendo em consideração o número de pontos que fixam e o seu comportamento quanto à preservação ou inversão de ângulos orientados (fonte: Breda *et al.*, 2011)

2.3.4.2 Simetrias

Diz-se que uma isometria f é uma simetria para a figura F se f fixa (deixa invariante) essa figura, isto é, se f(F)=F (Breda *et al*., 2011, p. 96). Uma vez que a composição de duas simetrias de uma dada figura F é ainda uma simetria de F e que a transformação inversa de uma simetria de F é ainda uma simetria de F, o conjunto constituído por todas as simetrias de F munidas da operação composição de funções é um grupo, o grupo de simetrias de F. Quando a reflexão numa reta l faz parte do grupo de simetrias de uma dada figura diz-se que esta possui simetria axial e que l é um eixo de simetria dessa figura (*ibidem*).

Segundo Breda *et al.* (2011), à nossa volta pode-se encontrar diversas formas vivas e inanimadas com simetria axial. Para além da simetria axial existem outros tipos de simetrias, nomeadamente, a simetria rotacional, e como caso, particular desta, a simetria central. Diz-se que uma dada figura possui simetria rotacional de ordem n, com n>1, quando o grupo de simetrias dessa figura possui n rotações com centro num mesmo ponto O e de amplitudes (360.º* K)/n, K=1, 2,…, n . Uma figura possui simetria central se a rotação de amplitude 180.º faz parte do grupo de simetrias que essa figura possui. Toda a figura com simetria central é, obviamente, uma figura com simetria rotacional. Existem, contudo, figuras com simetria rotacional que não têm simetria central. Tal como no caso da simetria axial, a simetria rotacional e central abundam no nosso meio. Das figuras geométricas básicas, o círculo destaca-se pela elevada simetria que apresenta. De facto, qualquer rotação de centro do círculo é uma simetria e as retas que passam pelo seu centro são eixos de simetria (*ibidem*).

A simetria é um conceito-chave em diferentes áreas da matemática, contudo é na geometria que atinge a sua maior relevância. Segundo o novo programa de matemática de 2007 (Ponte *et al*., 2007, p. 37), *através da simetria podem caracterizar-se objectos geométricos e simplificar-se argumentos e, com o seu recurso, é possível elaborar estratégias de resolução de problemas em muitos casos de maior eficácia*. A simetria é um conceito muito rico na área da geometria, revelando-se por isso uma mais-valia para ser trabalhada em sala de aula com os alunos. A simetria de uma figura é algo mais do que uma transformação geométrica. Ao falar em simetria está-se a referir à simetria de uma figura (um subconjunto de pontos do plano ou do espaço). Segundo Bastos (2006), podemos ter a simetria de uma reta, de um retângulo ou de uma esfera, mas também de um objeto artístico, como uma pintura ou uma escultura, desde que entendidos como subconjuntos de pontos do plano, como o primeiro exemplo, ou do espaço como o segundo exemplo. Seguem três exemplos de figuras simétricas, nas figuras 2.11 a 2.13:

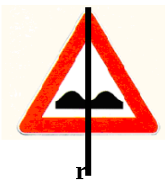


Figura 2.11 – Simetria de reflexão

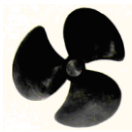


Figura 2.12 – Simetria de rotação

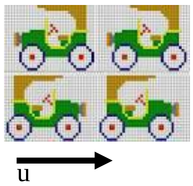


Figura 2.13: simetria de translação

A figura 2.11 apresenta simetria de reflexão porque ao efetuar uma reflexão segundo o eixo de simetria r, a figura é transformada nela própria. Neste caso, podemos afirmar que a figura tem uma simetria de reflexão. A figura 2.12 apresenta três simetrias de rotação, pois ao fazer uma rotação do plano no ponto *O* com um ângulo de 120.º a figura transformada é exatamente igual à original. Pode-se assim afirmar que as rotações de centro *O* e ângulo de 120.º, 240.º e ainda 360.º são simetrias da figura ou que a figura tem 3 simetrias de rotação com centro em O. A figura 2.13, supondo que é prolongada indefinidamente para os dois lados, tem simetria de translação, isto é, se fizermos a translação do plano segundo um vetor u, a figura no seu conjunto, é transformada nela própria.

Bellicanta (2004) afirma que a simetria está presente no quotidiano e na natureza: nas asas de uma borboleta ou numa folha de árvore. A palavra simetria é utilizada na linguagem comum com dois significados: num, simétrico indica algo bem - proporcionado ou bem balanceado, noutro, denota a concordância em que várias partes de algo se integram numa unidade. Weyl (2007, p. 17, citado por Bellicanta, 2004) considera que *O sentido da simetria é a ideia pela qual o homem tem tentado compreender e criar a ordem, a beleza e a perfeição através dos tempos*. Em sentido restrito, o conceito de simetria tem sido referido como a simetria bilateral ou de reflexão em torno de um eixo. Em termos mais amplos, simetria refere-se a todas as ocorrências de transformações geométricas que mantêm uma determinada forma invariante, entre outras, as isometrias de reflexão, translação e rotação, sendo a simetria uma propriedade das figuras. Simultaneamente, como a simetria preserva a forma, conserva também caraterísticas como os ângulos, o comprimento dos lados, as distâncias, os tipos e os tamanhos, alterando apenas a posição da figura (Bellicanta, 2004). Segundo Bastos (2007) s*imetria de uma figura é algo mais do que uma transformação geométrica. (…) Simetria de uma figura F é uma isometria T do plano que deixa a figura invariante, isto é, tal que T(F)=F*. Relativamente à preparação dos docentes de matemática portugueses sobre este tópico, o Grupo de Trabalho de Geometria da APM expressou, num documento que elaborou sobre o novo programa, o receio de que *a palavra simetria (...) continue a designar a transformação geométrica a que atualmente chamamos reflexão*. Bastos (2007) afirma ser importante que os docentes conheçam bem as transformações com que estão a trabalhar para orientar os alunos na construção correta das ideias.

Isometrias no programa de Matemática do ensino básico

Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007, p. 36) *(…) as tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial (…) pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão*. E ainda temos:

> *As isometrias permitem desenvolver nos alunos o conceito de congruência (figuras congruentes relacionam-se entre si através de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes. Este tipo de transformações permite a exploração, construção e classificação de frisos e rosáceas. A noção de amplitude de um ângulo e a sua medição em graus, são introduzidas neste ciclo, e têm um papel importante no estudo das rotações e no trabalho com as figuras geométricas* (Ponte *et al.*, 2007, p. 37).

O novo programa de Matemática do ensino básico de 2007 (Ponte *et al.*, 2007) recomenda a exploração das isometrias que se inicia no 1.º ciclo do ensino básico de uma forma intuitiva, mas que vai adquirindo uma maior formalização nos ciclos seguintes. Trata-se de uma mudança considerável em relação ao programa anterior e que é explicitamente reconhecida pelos autores do programa: *Uma alteração de relevo em relação ao programa anterior é que se estuda logo desde o 1.º ciclo diversas transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização* (*ibidem*, p. 7). O referido documento refere que no 2.º ciclo, o aluno tem de chegar às propriedades das isometrias, compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar simetrias e no 3.º ciclo, o programa destaca a translação como associada a uma vetor e o aluno deverá reconhecer as propriedades comuns ás várias isometrias e reconhecer, que a translação é a única isometria que preserva as direções. Este documento refere, ainda, que o estudo das isometrias deve iniciar-se no 1.º ciclo através dos frisos com aprofundamento no 2.º ciclo, com especial relevo na reflexão e na rotação. No 3.º ciclo, associa-se à translação o vetor associado. O trabalho com frisos, pode constituir uma forma natural de introduzir o tema das transformações geométricas. Relativamente a este tema, o novo programa de matemática do ensino básico (Ponte *et al*., 2007, p. 36) refere que:

> *o estudo da geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar e construir figuras geométricas e de operar com elas. As tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial neste ciclo, sobretudo as que dizem respeito a reflexões e rotações, pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão.*

A exploração das isometrias no referido programa de matemática não acaba nas quatro transformações isométricas no plano euclidiano, também está referida a identificação de simetrias em frisos, em pavimentações e em rosáceas, no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Por fim, refere que mesmo, tratando-se de uma exploração intuitiva, os docentes terão que estar preparados para o fazer, para que a mesma não passe de uma exploração com um mero propósito estético (*ibidem*). Bastos (2007, p. 23) justifica a necessidade de atribuir uma maior atenção ao estudo das transformações geométricas, por um lado, pela sua relevância na história da matemática atual, e por outro *porque constituem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço*. Para o estudo das isometrias e frisos é essencial o uso de instrumentos de medida e desenho, de materiais manipuláveis, como espelhos e miras, programas de geometria dinâmica e applets (Cabrita *et al*., 2009).

Apresenta-se, de seguida, os tópicos das isometrias ao longo do ensino básico constante no novo programa de matemática do ensino básico na tabela 2.4:

Isometrias– 1.º Ciclo– 3.º e 4.º anos	
Tópicos	**Objetivos específicos**
Figuras no plano e sólidos geométricos - reflexão	Identificar no plano eixos de simetria de figuras. • Construir frisos e identificar simetrias. Nota: Propor a exploração de frisos identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta).
Isometrias– 2.º Ciclo	
Tópicos	**Objetivos específicos**
Reflexão, Rotação e Translação • Noção e propriedades da reflexão, da rotação e	Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado. • Construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias. • Compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias

da translação • Simetrias axial e rotacional	numa figura. • Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias. • Identificar as simetrias de frisos e rosáceas. • Construir frisos e rosáceas.
Isometrias – 3.º Ciclo	
Tópicos	**Objetivos específicos**
Isometrias • Translação associada a um vetor • Propriedades das isometrias	Compreender as noções de vetor e de translação e identificar e efetuar translações. • Identificar e utilizar as propriedades de invariância das translações. • Compor translações e relacionar a composição de translações com a adição de vetores. • Reconhecer as propriedades comuns das isometrias. • Reconhecer que a translação é a única isometria que conserva direções.

Tabela 2.4: Isometrias– 1.º Ciclo– 3.º e 4.º anos, 2.º e 3.º Ciclos no NPMEB (fonte: Ponte *et al.*, 2007)

2.3.5 Geometria *Sona* e as suas potencialidades de uso educacional

Neste ponto far-se-á apresentação da geometria *Sona*, do povo que a pratica e da sua localização geográfica e das potencialidades matemáticas e educacionais da geometria *sona*.

Geometria *Sona* e a sua localização

Segundo Gerdes (2008), até ao final dos anos 50, os nativos africanos do povo *Tshokwe* ou *Cokwe*, hoje com aproximadamente um milhão de pessoas que vivem no nordeste da Angola, reuniam-se à volta da fogueira e, após a caça, escutavam um deles a contar histórias segundo um ritual preciso. Para tal, marcavam no solo arenoso com os dedos uma malha com formato pontilhado, podendo esta ser quadrada ou triangular, dependendo do desenho a ser executado, e realizavam os seus desenhos (*Sona*), sem retirar o dedo da areia até terminar toda a figura. De acordo com as suas tradições, vários *Sona* eram designados como ritual de passagem dos jovens para a idade adulta. Segundo Bastin (citado por Gerdes, 2008), as atividades artísticas dos *Cokwe* começam muito cedo: *Aprendendo, o jovem diverte-se ao fazer desenhos na areia com os dedos, estes desenhos chamados Sona, (nome que hoje se dá à escrita) aparecem nas paredes das casas pintadas por homens, mulheres e crianças* (Gerdes, 2008. p. 23).

Fontinha (1983, citado por Gerdes, 2008), descreve que quando os *Cokwe* se encontravam no terreiro da aldeia ou no acampamento de caça, sentados à volta da fogueira ou à sombra de árvores, costumavam passar o tempo em conversas ilustrando-as com desenhos (*lusona*, plural: *sona*) na areia. Muitos destes desenhos pertenciam a uma velha tradição, referindo-se a provérbios, fábulas, jogos, lendas, animais e desempenharam um papel importante na transmissão do conhecimento e da sabedoria de uma geração para a seguinte. O significado e a realização dos desenhos mais difíceis eram transmitidos por especialistas, chamados de *akwa kuta sona* (conhecedores de desenho) – a neófitos interessados nos *Sona*. Estes mestres de desenho faziam parte de uma elite que procurava deixar o saber que havia recebido dos seus antepassados aos seus descendentes diretos (Fontinha, 1983, p. 44, citado por Gerdes, 2008). Com a penetração e ocupação colonial, a tradição de desenho entrou em decadência mas alguns missionários e etnógrafos recolheram evidências dos vários *sona*, escapando assim do esquecimento. A maior e a mais importante coleção de *sona* foram concluídas, em 1963, por Fontinha e publicada em 1983. Esse livro contém 287 desenhos diferentes recolhidos no ano de 1940 e no início do ano de 1950. Fontinha observa que em cada dia que passa e em cada velho que morre, veem-se desaparecer testemunhos preciosos do seu passado coletivo (Gerdes, 2008, pp. 25-26). [11]

A tradição *sona* pertence à herança dos *Tchokwe* e dos povos vizinhos no leste de Angola, no noroeste de Zâmbia.

No anexo 19 reproduzem-se três histórias/ fábulas bastante conhecidas deste povo. Note-se que estas histórias são contadas ao mesmo tempo que o desenhador efetua o desenho na areia.

Alguns aspetos geométricos, matemáticos e educacionais da tradição dos desenhos *Sona*

Vamos analisar alguns aspetos geométricos, matemáticos e educacionais dos *sona*, tais como a monolinearidade, a simetria, as várias classes dos *sona* e algoritmos, regras de reflexão, regra de encadeamento ou de cadeia, *sona* construídos com os mesmos algoritmos, etc.

- Monolinearidade como valor cultural

Segundo Gerdes (1994), 60% dos desenhos *Sona* são monolineares, ou seja, são compostos por uma única linha fechada, ou seja, a linha pode entrecruzar-se, mas nunca pode passar novamente aonde já foi desenhada. De acordo com este investigador, pode-se supor que a monolineariedade possuía um alto valor e talvez tenha constituído um ideal ou norma cultural. Segundo Gerdes (2008), mais de 80% dos *Sona* da maior coleção, a de Fontinha (1983), são simétricos e mais ou menos 75% dos *Sona* têm pelo menos um eixo de simetria. Observa-se, por um lado, que 86% dos padrões monolineares são também simétricos. Por sua vez, 60% dos desenhos simétricos são monolineares, ao todo 46% dos *sona* são simultaneamente simétricos e monolineares, o que parece refletir uma escolha.

Conforme o desenhador, o desenho tanto podia ser simétrico e não ser monolinear, como podia ser monolinear e não possuir eixos de simetria. Para os especialistas dos *sona*, a monolineariedade e a simetria são bastante importantes, pois quando se conseguem reunir estas duas características é

11 O povo *Tchokwe* (ou Quioco), que habita o nordeste da Angola, partes do noroeste da Zâmbia e as áreas adjacentes do sul do Congo, é tradicionalmente caçador, mas desde meados do século XVII também se dedica à agricultura. Este povo é conhecido pela sua arte decorativa, abrangendo a ornamentação de esteiras a cestos entrançados, trabalho em ferro, cerâmica, gravação de cabeças, tatuagens, pintura nas paredes e desenhos na areia. Os desenhos têm de ser executados de forma suave e contínua, pois qualquer hesitação ou paragem por parte do desenhador é interpretada pela audiência como uma imperfeição ou falta de conhecimento, o que é assinalado com um sorriso irónico (Fontinha, 1983). Estes desenhos na areia são parte da tradição oral do povo *Tchokwe* e servem basicamente como um dispositivo mnemónico para contar histórias. Este pode ser desenhado sem levantar o dedo ou refazer uma linha. e para iniciar um *Lusona*, o artista geralmente começa por alisar a areia e com a ponta dos dedos cria uma rede de pontos equidistantes chamado de tobe que servirá como um quadro para o *lusona* (Gerdes, 2007).

sinal que o *lusona* foi executado por um grande mestre de desenho nas areias. Contudo, Gerdes (1994) avança a hipótese de os desenhos encontrados hoje e que não são monolineares sejam resultado de alguma perda na técnica tradicional. Apresentam-se alguns *sona* monolineares na figura 2.14:

Figura 2.14: *Sona* monolineares (fonte: Gerdes, 2008)

Nem todos os *sona* são monolineares, sendo multilineares, no sentido que são compostos por mais do que uma linha. O seguinte *lusona* ilustrado na figura 2.15 é 3 linear e representa uma máscara *Tshihongo*.

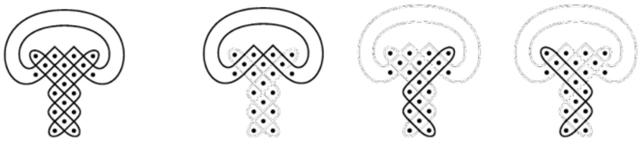


Figura 2.15: Máscara *Tshihongo*- *sona* 3 linear (fonte http://www.africafederation.net/Tchokwe_Art.htm)

Seguem-se outros *sona* simétricos mas não monolineares (figura 2.16):

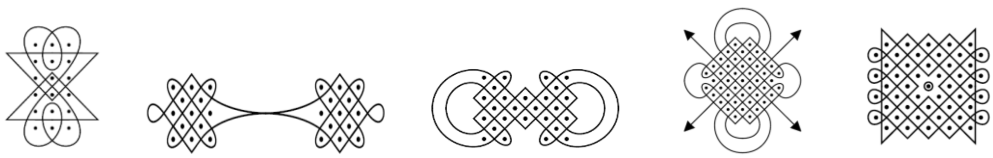


Figura 2.16: *Sona* simétricos mas não monolineares (fonte: Gerdes, 2008)

Segundo Gerdes (2008), segue-se alguns exemplos de *sona* que apresentam simetria e monolinearidade ao mesmo tempo (figura 2.17):

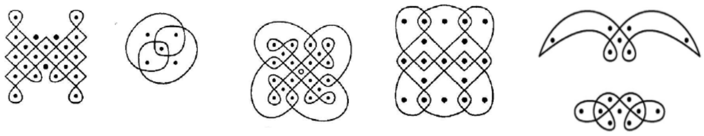
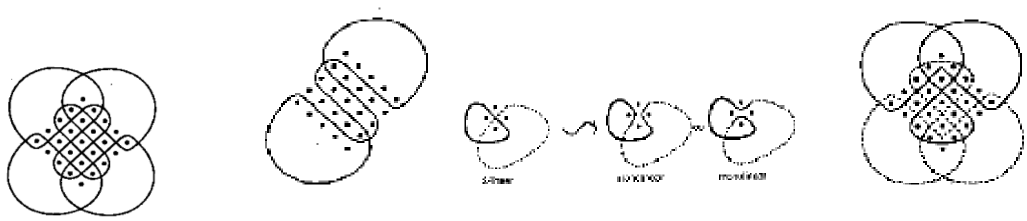


Figura 2.17- Exemplos de *sona* simétricos e monolineares ao mesmo tempo (fonte: Gerdes, 2007; 2008)

Como os exemplos da figura anterior sugerem, simetria e monolinearidade desempenharam um papel importante enquanto valores culturais: a maioria dos *sona* são simétricos e/ou monolineares. Este autor analisou esta simetria e monolinearidade como valores culturais salientes e na geometria *sona* estudou as particularidades de classes de *sona* e os algoritmos geométricos correspondentes para a sua construção. Revelou a construção sistemática de padrões de base monolinear, tal como as regras de encadeamento e de eliminação para a construção de *sona* monolineares. Supõe-se que *os especialistas dos sona que inventaram estas regras provavelmente soubessem por que elas são válidas, quer dizer, eles sabiam provar, duma maneira ou doutra, a veracidade que as regras* *expressam* (Gerdes, 2008, p. 15). Segundo Gerdes (2007) os especialistas dos *sona* desenvolveram toda uma série de algoritmos geométricos, tais como regras de encadeamento, de eliminação, etc. para a construção de desenhos monolineares e simétricos, que serão exploradas mais adiante.

- Regra da transformação

Segundo Gerdes (1994; 2007; 2008), uma das questões que se coloca sobre os *sona* é a de saber se se pode transformar um desenho 2-linear (constituído por duas linhas) num *sona* monolinear. Este autor exibe um exemplo de um *sona* 2- linear com dois eixos de simetria perpendiculares (figura 2.18.a), em que se ilustra que é possível através de uma regra simples obter um monolinear com apenas um eixo de simetria (figura 2.18.d). A regra para esta transformação é: *Quando se cortam duas linhas fechadas no seu ponto de intersecção e cada uma de ambas as extremidades assim obtidas da primeira curva se liga a uma da segunda, então se transita das duas iniciais para uma única curva fechada* (Gerdes, 1994, p. 24), ou seja, a regra consiste em cortar duas linhas fechadas, pelo seu ponto de interseção e a cada uma das extremidades obtidas da primeira curva, vai-se ligar a uma da segunda e assim passa-se de duas linhas iniciais para uma única linha fechada.
A figura 2.18 mostra a referida regra acima de forma esquemática:



desenho inicial (2 linear) 2-linear monolinear ou monolinear desenho final (monolinear)

Figura 2.18: Regra da transformação- Transformação de um desenho *sona* 2 linear em monolinear (fonte: Gerdes, 1994; 2008)

- Simetria e assimetria

Vários tipos de simetria nos *sona*

Segundo Araújo (2004), o povo *Tchokwe* aprecia que os seus desenhos possuam algumas simetrias. Pode-se ter outros tipos de simetrias, como simetria com apenas um eixo horizontal ou eixo vertical ou obliquo e também pode-se ter simetria rotacional (*ibidem*). Segundo Gerdes (2008), encontram-se com frequência desenhos na areia com simetria dupla, ou seja, com dois eixos de simetria perpendiculares entre si, sendo os *sona* com apenas simetria rotacional de 180.º ou de 90.º menos vulgares. Segundo Gerdes (2008), muitos *sona* são simétricos e traçados com apenas uma linha.
Segundo Gerdes (1993; 2008), a simetria como valor cultural do povo *Cokwe* está presente em vários desenhos, acreditando que na elaboração dos *sona* se usou uma técnica de construção meticulosa. Note-se que na sua grande maioria são monolineares, sem retirar o dedo da areia até ao fim do desenho, contendo simetrias de rotação, reflexão e translação. Para facilitar a percepção das

transformações isométricas, apresenta-se e analisa-se alguns exemplos de tipos de simetria (de reflexão e rotacional) encontrados em *sona*, podendo estes agrupar-se da seguinte forma*: Sona* monolinear com um eixo de simetria; *Sona* polilinear com um eixo de simetria; *Sona* monolinear com dois eixos de simetria; *Sona* polilinear com dois eixos de simetria; *Sona* polilinear com 4 simetrias rotacionais de amplitudes 90.º, 180.º, 270.º e 360.º; *Sona* monolinear com 2 simetrias rotacional de amplitudes de 180.º e 360.º; *Sona* monolinear sem simetria; *Sona* monolinear com 4 simetrias de rotação de amplitudes 90.º, 180.º, 270.º e 360.º, apresentados na tabela 2.5:

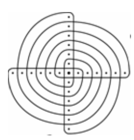
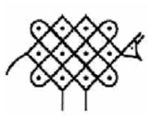
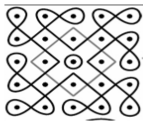
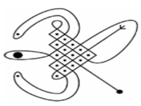
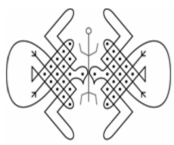
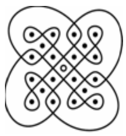
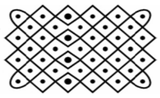
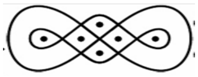
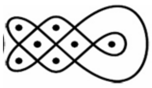
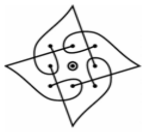
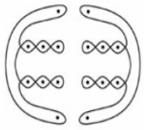
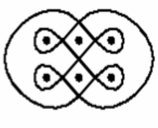
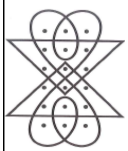
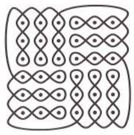
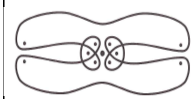
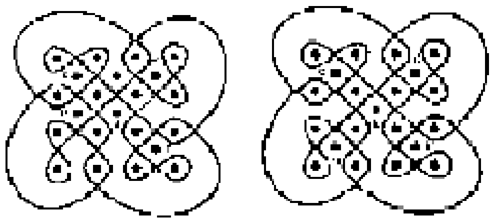
				
Sona 2-linear com 4 simetrias de rotação (amplitude de de 90.º, 180.º, 270.º e 360.º)	*Sona* monolinear sem simetria	Sona 2-linear com 4 simetrias de rotação (amplitude de 90.º, 180.º, 270.º e 360.º)	*Sona* sem simetria	Sona polilinear com um eixo de simetria (vertical)
				
Sona monolinear com 4 simetrias de rotação (amplitude de 90.º, 180.º, 270.º e 360.º)	Sona monolinear com um eixo de simetria (horizontal)	*Sona* polilinear com 2 eixos de simetria (eixo vertical e horizontal) e 2 simetrias rotacionais (amplitude 180.º e 360.º)	sona monolinear com um eixo de simetria horizontal	*Sona* polilinear com 4 simetrias rotacionais (amplitude de 90.º, 180.º, 270.º e 360.º)
				
Sona com 2 simetrias rotacionais (amplitude de 180.º e de 360.º) e simetria axial de eixo vertical e horizontal	*Sona* monolinear com 2 eixos de simetria (eixo horizontal e vertical) e duas simetrias rotacionais (de amplitude 180.º e 360.º)	*Sona* com 2 simetrias rotacional de amplitudes 180.º e 360.º e duas simetrias de reflexão (eixo vertical e horizontal)	*Sona* polilinear com 4 simetrias rotacionais de 90.º (amplitude 90.º, 180º, 270.º e 360.º)	*Sona* polilinear com 2 eixos de simetria (vertical e horizontal) e 4 simetrias rotacionais (90.º, 180.º, 270.º e 360.º)

Tabela 2.5: Análise simples de alguns desenhos *sona* quanto à simetria (axial e rotacional) e quantidade de linhas fechadas

Assimetria dos *sona*

A assimetria em alguns desenhos é necessária (Araújo, 2004) e um exemplo é o desenho *sona* do conto “Sambálu” (figura 2.19). Esta autora refere que outros desenhos *sona* necessitam de ter simetria rotacional, referindo haver uma relação entre o conto e a cultura do povo que o desenha, pois, para os desenhadores de *sona*, um mesmo conto pode ter mais do que um desenho, com pequenas diferenças entre si, sendo que estas diferenças são geralmente a presença de simetria e ou de assimetria da figura (*ibidem*). Na figura 2.19.a reproduz-se um *lusona* assimétrico, enquanto que a figura 2.19.b, representa uma variante do desenho 2.19.a, mas com simetria rotacional.



a b

Figura 2.19. Duas formas diferentes de representar o mesmo *lusona* do conto "Sambálu", cuja diferença é a presença ou não de simetria (fonte: Gerdes, 1994)

- Classes dos *sona* e algorítmos

Segundo Araújo (2004) e Gerdes (2008**)**, pode-se classificar os *Sona* de acordo com as suas dimensões e métodos de construção. Para Gerdes (1994), a maioria dos desenhos são da classe dos Padrões de Fita Trançada. Um desenho chama-se padrão de fita trançada (ou designada por padrão de esteira entrançada), quando as linhas pelas quais é composto correspondem às tiras duma fita trançada, fazendo ângulo de 45º com as bordas (figura 2.20).

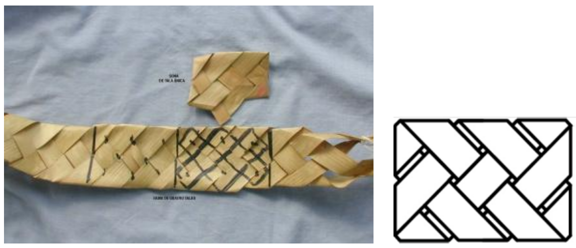


Figura 2.20. Padrões de Fita Trançada (fonte: Gerdes, 2008)

Este autor refere que se pode dividir os padrões de fita trançada em 4 classes, denominadas por classes A, B, C e D. Para uma melhor compreensão dessas classes, designe-se por f_1 e c_1 o número de filas e colunas principais dos pontos de rede e f_2 e c_2 o número de filas e colunas acrescidos à rede principal. As dimensões das redes de referência são dadas por f_1 x c_1. A título ilustrativo observe-se a figura 2.21, onde se consideram filas principais as filas pretas e filas acrescidas à rede principal as filas a vermelho. Analogamente, as colunas principais são as colunas pretas e as colunas vermelhas as colunas acrescidas à rede principal.

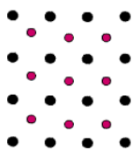


Figura 2.21. Redes principais e redes acrescidas à rede principal

A tabela 2.6 ilustra as várias classes de *sona* e as suas principais características, segundo Gerdes (2008):

Classe	Caraterística
A	$F_1=f_2+1$ ou $c_1=c_2+1$
B	$F_1=f_2$ e $c_1=c_2+1$
	$F_1=f_2+1$ e $c_1=c_2$
C	$F_1=f_2$ e $c_1=c_2$
D	$F_1=f_2-1$ e $c_1=c_2+1$
	$F_1=f_2+1$ e $c_1=c_2-1$

Tabela 2.6: Classes dos padrões de fita trançada (fonte: Gerdes, 2008)

Ainda segundo Gerdes (2008), o padrão de fita trançada pode ser retilíneo, curvilíneo ou misto (figura 2.22).

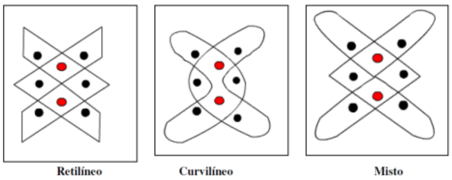


Figura 2.22. Tipos de padrão de fita trançada- retilíneo, curvilíneo ou misto (fonte: Gerdes, 2008)

De seguida, analisa-se com mais pormenor cada uma das classes de *sona* acima indicada.

Classe A

De todos os desenhos na areia do tipo padrões de fita trançada, os mais frequentes são os de tipo A (Gerdes, 2008). Como referido, o algoritmo de padrões de fita trançada é: $f_1 = f_2 +1$ ou $c_1 = c_2 + 1$. Na maioria das vezes, estes desenhos possuem dimensões que são de dois números consecutivos e todos estes *sona* são monolineares (sem contar os pequenos segmentos auxiliares acrescentados nos casos de patas e caudas) (*ibidem*). Na figura 2.23 apresentam-se alguns exemplos de *sona* de classe A.

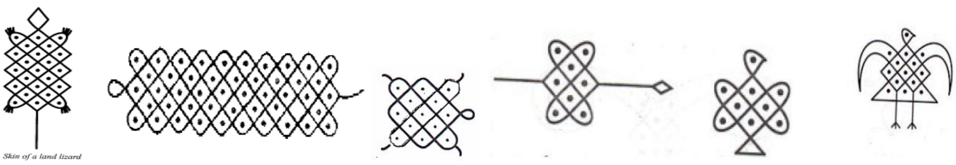


Figura 2.23: Exemplos de *Sona* de classe A (fonte: Gerdes, 1994)

Classe B

A classe B possui o algoritmo geométrico: $f_1 = f_2$ e $c_1 = c_2 + 1$ ou $f_1 = f_2 +1$ e $c_1 = c_2$. Todos os *sona* pertencentes a esta classe são monolineares e correspondem a uma rede de pontos quadrada. De acordo com Gerdes (2008), esta situação leva a supor que, pelo menos, alguns dos especialistas em desenhos sabiam que estes padrões eram monolineares. Apresentam-se exemplos de *Sona* da classe B na figura 2.24.

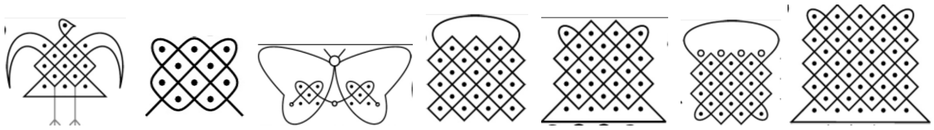


Figura 2.24. Exemplos de *Sona* da classe B (fonte: Gerdes, 2008)

Poucos desenhos *Sona* da classe B não seguem o padrão ilustrado na figura 2.24 (Gerdes, 2008), em que $f_1 = 2$; $f_2 = 2$; $c_1 = 9$; $c_2 = 9$.

Classes C e D

Gerdes (2008) refere que os *sona* baseado em padrões de fita trançada das classes C e D são relativamente raros. Na figuras 2.25 e 2.26 apresentam-se exemplos de *sona* de classe D , isto é, em que o respetivo algoritmo se carateriza por: $f_1 = f_2 - 1$ e $c_1 = c_2 + 1$ ou $f_1 = f_2 + 1$ e $c_1 = c_2 – 1$.

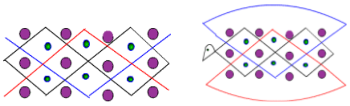


Figura 2.25. Exemplos de *sona* da classe D: f_1=3, f_2=4, c_1=2, c_2=3 (fonte: Gerdes, 2008)

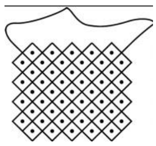


Figura 2.26. Outro exemplo de *sona* da Classe D: f_1=4, f_2=5, c_1=6, c_2=5 (fonte: Gerdes, 2008)

- Regra para cálculo do número de linhas necessárias para desenhar *sona* (máximo divisor comum entre dois números)

Uma possível exploração didática dos *sona* que o docente pode utilizar na sala de aula para introduzir o conceito de máximo divisor comum entre dois números prende-se com a análise e determinação do número de linhas necessárias para desenhar um *sona*, conhecidas as dimensões da rede ponteada (Gerdes, 2007). O povo *Cokwe* para executar os *Sona*, desenha primeiro a rede ponteada e, apenas com base nas dimensões desta, é possível determinar quantas linhas fechadas são necessárias para construir o desenho. Por exemplo, numa rede 2x6, são necessárias duas linhas fechadas para a sua construção. Contudo, se quiser desenhar uma Leoa com dimensões 5x7, será necessária apenas uma linha fechada.

De acordo com a proposta didática apresentada por Gerdes, o docente pode propor aos seus alunos que comecem por construir redes de dimensões 2xn, n εIN. Nas redes com 2 filas (linha ou coluna), quando existem 2, 4, 6, (...) pontos na fila (coluna ou linha, respetivamente), precisam-se de 2 linhas fechadas para abraçar todos os pontos. Quando se tem 1, 3, 5, (...) precisa-se apenas de 1 linha fechada. O docente pode sublinhar que quando se tem 2, 4, 6, é necessário traçar 2 linhas fechadas e quando se tem 1, 3, 5, (...), precisam-se apenas de 1 linha fechada para abraçar todos os pontos. Este pode continuar a questionar o que acontecerá se as redes tiverem outras dimensões tal como por exemplo construir desenhos com dimensões 3xn, n εIN e assim como o que acontece nos desenhos com dimensões 4xn, n εIN. A partir dos desenhos realizados, o docente pode pedir ao aluno para preencher uma tabela como a que se segue (tabela 2.7), para estes analisarem e determinem a função matemática que calcula o número de linhas fechadas usadas na construção dos desenhos *sona,* segundo o número de filas e o número de colunas.

Nº de Filas	Nº de Colunas	Nº de linhas fechadas
2	**1**	**1**
2	**2**	**2**
2	**3**	**1**
2	**4**	**2**
2	**5**	**1**
2	**6**	**2**
3	**1**	**1**
3	**2**	**1**
3	**3**	**3**
3	**4**	**1**
3	**5**	**1**
3	**6**	**3**
4	**1**	**1**
4	**2**	**2**
4	**3**	**1**
4	**4**	**4**
4	**5**	**1**
4	**6**	**2**
4	**7**	**1**
4	**8**	**4**

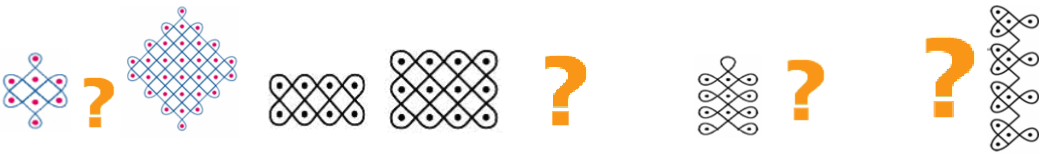
Tabela 2.7: Análise do número de linhas fechadas dos *sona*, relacionando o número de filas e o número de colunas

O docente pode chamar a atenção dos alunos, caso este apresentem dificuldades, que na rede de dimensões 3xn, n ε IN, observa-se que quando n é múltiplo de 3, obtém-se 3 linhas fechadas. Na rede de dimensões 4xn, n ε IN, quando n é múltiplo de 4, tem-se 2 possibilidades: 2 ou 4 linhas fechadas. O que está em causa é a resolução da seguinte situação:dados dois números conhecidos - o número de filas e o número de colunas da rede de pontos - como obter um terceiro número a partir deles - o número de linhas fechadas necessárias para fazer o desenho completo. O docente pode referir que existem várias formas de obter o número de linhas fechadas a partir de outros dois números e da análise da tabela preenchida, o aluno pode chegar ao número de linhas fechadas usando o número de filas e o número de colunas.

Seja c = número de colunas e f = número de filas e $\Psi(c, f)$ a função entre c e f que resultará no número de linhas fechadas. O docente pode-se sugerir aos alunos para tentarem as operações habituais, tais como a soma, a diferença, a multiplicação e a divisão entre o número de colunas e o número de filas e este deverá chegar a conclusão que não se trata de nenhuma destas operações habituais. Como o aluno pode observar na tabela, o número de linhas fechadas divide simultaneamente (ou é um divisor comum) o número de filas e do número de colunas. Quando se tem uma rede de dimensões 4x6, o número que divide o número de filas e o número de colunas é 2. Então, pode-se afirmar que o 2 é divisor comum de 4 e 6 e desta forma trata-se de determinar um divisor comum entre o número de colunas e o número de filas, ou seja $\Psi(c, f)$ = divisor comum entre c e f. Porém, como se pode ver na tabela 2.7, numa rede de dimensão 4xn, n ε IN, quando n é múltiplo de 4 tem-se 2 possibilidades: 2 ou 4 linhas fechadas. Caso o aluno não consiga chegar ao resultado pretendido, o docente pode referir que se trata do Maior Divisor Comum entre c e f, logo:$\Psi(c, f)$ = m.d.c.(c, f).

- Padrões

Na revisão da literatura, encontram-se exemplos de atividades didáticas em que os *sona* surgem associados a padrões de crescimento. Reproduzimos na figura 2.27 exemplos desse tipo de atividades em que se pede ao aluno que desenhe um determinado termo em falta de uma sequência.



a) **b)** **c)** **d)**

Figura 2.27: Atividades para desenhar o termo em falta de uma sequência dada.
Fonte: http://educacao.te.pt/jovem/index.jsp?p=115&idArtigo=112 baseada numa atividade proposta pela APM

- Soma de números consecutivos (fórmulas de sucessões numéricas)

Para além da questão da disposição (padrões) das redes para desenvolver os traçados, outra questão passível de exploração didática está relacionada com processos de contagem (a quantidade de linhas necessárias para se compor os desenhos *sona*). Gerdes (2007) sugere que se pode-se apresentar aos alunos o *sona* que representa um antílope e pedir .o número de linhas necessárias para desenhar o *lusona*.

Essa figura foi desenvolvida com uma rede retangular de dimensões 3 x 4, ou seja, 3 filas de 4 pontos, o que corresponde a um total de 12 pontos. Esse desenho permite contar os mesmos pontos de outra maneira, através das linhas e das colunas, como se ilustra na figura 2.28:

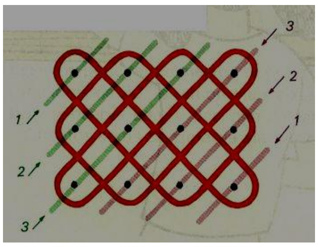


Figura 2.28 – *Sona* Antílope- Divisão do número de pontos em duas partes iguais (fonte: Gerdes, 1997, p. 64)

A rede pode ser dividida em duas partes iguais, sendo que número de pontos da parte da esquerda é igual ao número de pontos da parte da direita. Assim, o número total de pontos é

1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 2 (1 + 2 + 3) = 3 x 4. Logo: $1+2+3=\frac{3\times 4}{2}$

Da forma análoga, aplicando o mesmo raciocínio para uma rede 8 colunas por 9 filas, como se ilustra na figura 2.29.

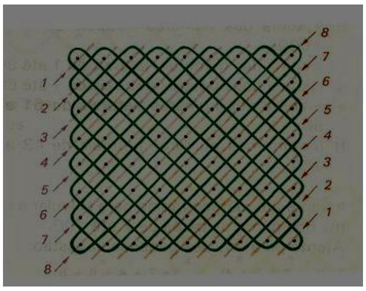


Figura 2.29 – *Sona* antílope- Rede de dimensões 8*9 (Fonte: Gerdes, 1997, p. 64)

Tem-se: 2 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) que é igual a 8 x 9 pontos.

Se a dimensão da rede for 10 x 11, chega-se à igualdade:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =

Raciocinando da mesma maneira, pode-se concluir que a soma de números de 1 a 20 é igual a 210 e que a soma de números naturais de 1 a 100 é igual a:

$$\frac{100\times 101}{2}=5050$$

Generalizando para um numero natural n , tem-se:

1+2+…+n=$\frac{n\times(n+1)}{2}$ ou seja $S_n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ em que S_n é a soma dos n primeiros números naturais.

- Regras para a construção de *sona* monolineares

Os desenhistas também inventaram várias regras para a construção de *sona* monolineares. A seguir, ilustram-se vários exemplos, apresentam-se algumas regras de construção de *sona* e algumas particularidades dos *sona*.

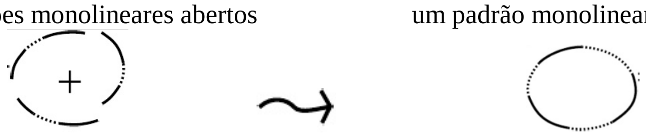
A) Regras de encadeamento (ou regra da cadeia)

Os *sona* reproduzidos na literatura etnográfica sugerem que os *akwa kuta sona*, ou seja, os especialistas na execução dos *sona*, conheciam algumas regras para 'encadear' padrões monolineares a novos e maiores padrões monolineares e que as as aplicavam com alguma frequência (Gerdes, 2008). Seguem-se cinco regras de encadeamento:

A1) Primeira regra de encadeamento

A regra de encadeamento mais simples consiste na criação de um novo padrão monolinear fechado, juntando dois (ou mais) padrões monolineares abertos, de tal modo que um extremo do primeiro *lusona* se liga a um extremo do segundo (figura 2.30). Depois ligam-se os dois extremos restantes e aparece um padrão monolinear fechado (Gerdes, 2008).

Dois padrões monolineares abertos um padrão monolinear fechado



Três padrões monolineares abertos um padrão monolinear fechado

Figura 2.30: Reprodução esquemática da primeira regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008, p. 129)

Seguem-se alguns exemplos da referida regra de encadeamento (figura 2.31 a 2.35).

A figura 2.31 dá um exemplo onde dois padrões-de-esteira-entrecruzada monolineares da classe B se encadeiam originando um *lusona* monolinear fechado. Neste caso torna-se possível desenhar todo o padrão com ambas as mãos (cada mão desenha uma metade).

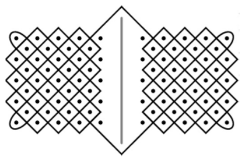


Figura 2.31: Exemplo do uso da 1.ª regra de encadeamento (fonte: Fontinha, p. 203, citado em Gerdes, 2008, p. 130)

Segue outro exemplo da aplicação da primeira regra de encadeamento (figura 2.32 e figura 2.33):

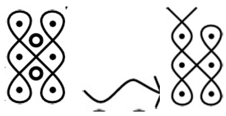


Figura 2.32: Aves na floresta (fonte: Fontinha, p. 203, citado em Gerdes, 2008, p. 130)

Segundo Gerdes (2008), uma das aplicações da primeira regra de encadeamento encontra-se na construção de *sona* monolineares com simetria rotacional de 90.º ou de 180.º: Juntam-se quatro exemplares do mesmo *lusona*, ligando consecutivamente os extremos obtidos após ter aberto, se necessário, os *Sona* fechados. A figura 2.32 dá um exemplo da abertura de um *lusona* fechado, trata-se do desenho de duas aves *tunjir* nos seus ninhos. Ligando os extremos como mostra a figura 2.33, obtém-se o *lusona* que representa uma floresta onde abunda a ave *Gundu*.

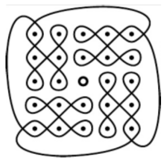


Figura 2.33: *Lusona* que se obtém da abertura da figura 2.32 e representa uma floresta onde abunda a ave Gundu (fonte: Gerdes, 2008)

Gerdes (2008, p. 131) afirma que do mesmo modo se podem construir os desenhos das figuras 2.34 e 2.35, a partir do padrão-de-esteira-entrecruzada da classe A de dimensões de 3x2, com simetria rotacional de 90.º e de 180.º, respectivamente.

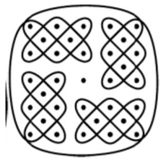


Figura 2.34: *Sona* construído a partir do padrão de esteira entrecruzada de classe A com simetria rotacional de 90.º, através da primera regra do encadeamento (fonte: Gerdes, 2008, p. 131)

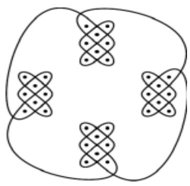
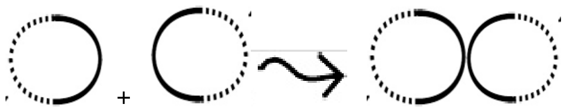


Figura 2.35: Outro *sona* construído a partir do padrão de esteira entrecruzada de classe A com simetria rotacional de 180.º, através da primeira regra do encadeamento (fonte: Gerdes, 2008, p. 132)

A2) Segunda regra de encadeamento

Segundo Gerdes (2008), a segunda regra de encadeamento refere que aparece um novo padrão monolinear quando dois padrões monolineares se 'fundem' num ponto (figura 2.36).



padrão linear   padrão linear   padrão monolinear novo

Figura 2.36: Representação esquemática da segunda regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008, p. 133)

A figura 2.37 dá exemplos de *sona* em que se aplicou, uma ou mais vezes, a segunda regra de encadeamento (os padrões parciais pertencem, em cada um dos exemplos, à classe A de padrões-de-esteira-entrecruzada).

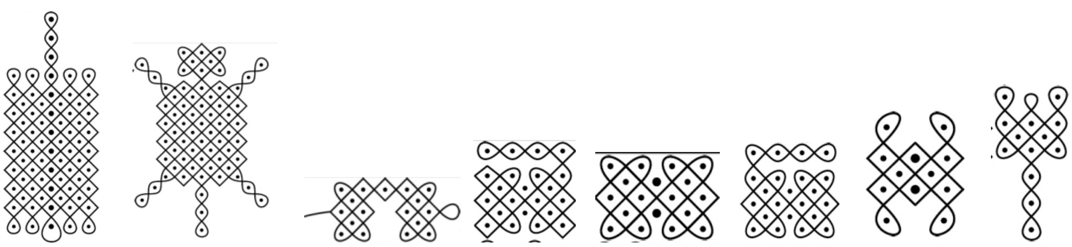
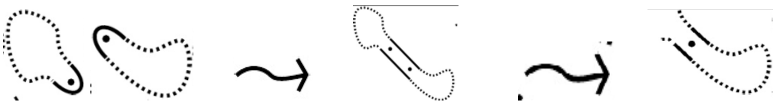


Figura 2.37: Exemplos de *sona* construídos segundo a segunda regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008)

A3) Terceira regra de encadeamento

Segundo Gerdes (2008), os padrões monolineares fechados também podem ser 'encadeados' de modo a formar padrões monolineares novos, como se indica a seguir. A figura 2.38 exibe a forma esquemática este encadeamento, podendo-se completar com uma ou com duas fases sucessivas. Durante a primeira fase, 'fundem-se' as linhas num lugar da fronteira e em seguida, podem fundir-se os dois pontos de fronteira num único ponto (segunda fase).



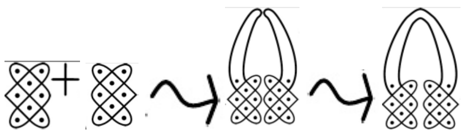
a b c

a- Dois padrões monolineares b- primeira parte da fundição (as linhas fundem-se num lugar de fronteira)
c- segunda fase da fundição (num único ponto)

Figura 2.38: Reprodução esquemática da terceira regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008, p. 136)

Seguem-se alguns exemplos de *sona* construiídos segundo esta regra de encadeamento (figura 2.39 a figura 2.41).

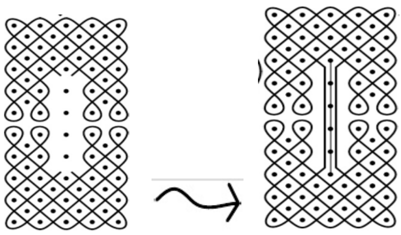
1.º exemplo: A figura 2.39.c mostra o *luson*a que representa um chocalho duplo de ferro. Nas figuras 2.39.a e 2.39.b indica-se a possível formação deste padrão, em que apenas se completa a primeira fase da terceira regra de encadeamento (Gerdes, 2008, p. 136).



a b c

Figura 2.39: 1.º exemplo de *sona* obtidos pela terceira regra de encadeamento, onde se completa apenas a primeira fase (fonte: Gerdes, 2008, p. 138)

2.º exemplo: A figura 2.40 dá um segundo exemplo da aplicação da terceira regra de encadeamento (Gerdes, 2008, p. 138).



a b

Figura 2.40: 2.º exemplo da terceira regra de encadeamento (fonte: Fontinha, 1983, p. 256, citado em Gerdes, 2008, p. 138)

3.º exemplo: O *lusona* ilustrado na figura 2.41 refere-se ao recinto-templo de ídolos protectores de notáveis e os seus descendentes.

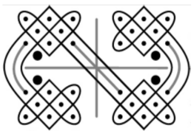
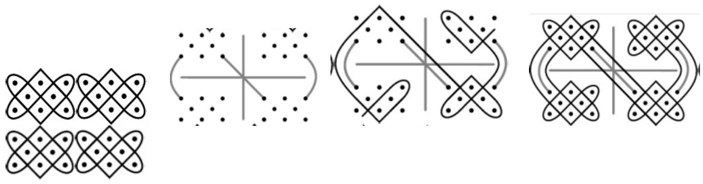


Figura 2.41: Recinto-templo de ídolos protectores denotáveis e seus descendentes (fonte: Fontinha, 1983, p. 258, citado por Gerdes, 2008, p. 138)

A sua estrutura de base (figura 2.42.d) foi construída a partir de quatro padrões-de-esteira-entrecruzada de dimensões de 2x3 (figura 2.42.a), onde a primeira fase da terceira regra de encadeamento foi aplicada três vezes. Depois da marcação dos pontos da rede, ligaram-se entre si os pontos da rede a serem fundidos por linhas auxiliares (figura 2.42.b), facilitando a execução do desenho e o resultado final é um *lusona* monolinear. O inventor deste *lusona* pretendia, de forma consciente, obter um desenho monolinear com simetria rotacional de 180.º (Gerdes, 2008, p. 139).

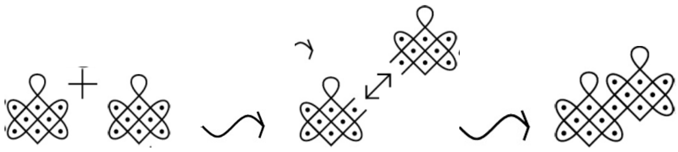


a b c d

Figura 2.42: 3.º exemplo da aplicação da terceira regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008)

4.º exemplo: Autofundição

A figura 2.43.b representa um desenho onde teve lugar uma 'autofundição' de dois pontos, que pertencem a lados distintos da rede. Talvez os *akwa kuta* sona experimentassem a 'autofundição' e talvez conhecessem algumas regras de autofundição (Gerdes, 2008, p. 147), como a que se segue:



a b c

Figura 2.43*: Sona* onde se verficou a regra da autofundição (fonte: Gerdes, 2008, p. 147)

A4) Quarta regra de encadeamento

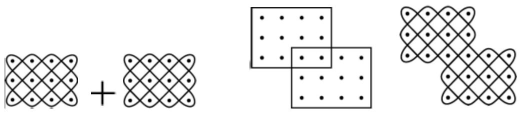
O *lusona* (figura 2.44.a) é monolinear se não se contar as caudas que se acrescentam no fim e foi formado a partir de cinco elementos de padrão-de-esteira-entrecruzada da classe A. De cada vez, dois elementos vizinhos têm dois pontos da rede em comum. O *lusona* ao lado (figura 2.44. b) é um desenho monolinear, se não se tomar em consideração as caudas, tendo desta vez sido formado com base em seis elementos de padrão-de-esteira-entrecruzada da classe A (Gerdes, 2008).

a b c

Figura 2.44: *Sona* construídos segundo a 4.ª regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008, pp. 149-150)

Seguem mais três exemplos da aplicação da quarta regra de encadeamento (figura 2.45 a 2.47).

1.º exemplo:



a b c

Figura 2.45: Exemplo da quarta regra do encadeamento utilizado possivelmente uma única vez (fonte: Gerdes, 2008, p. 151)

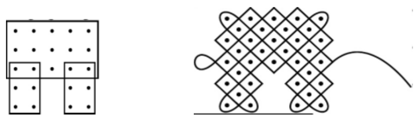
2.º exemplo:

A figura 2.46.a mostra o *lusona* que representa um leão, em que três elementos de padrão-de-esteira-entrecruzada de dimensões 2x3 foram encadeados para formar um padrão igualmente monolinear (esquema na figura 2.46.b).

a b

Figura 2.46- Outro exemplo da aplicação da quarta regra do encadeamento, possivelmente utilizado por duas vezes (fonte: Gerdes, 2008, p. 151)

A figura 2.47.b dá mais um exemplo em que se tenha utilizado, possivelmente, por duas vezes a quarta regra de encadeamento (Gerdes, 2008, p. 155):



a b

Figura 2.47: *Sona* construído através da aplicação da 4.ª regra de encadeamento- utilizado possivelmente por duas vezes (fonte: Gerdes, 2008, p. 155)

Segundo Gerdes (2008, p. 151), estes exemplos fazem supor que os *akwa kuta sona*, especialistas dos *sona*, que os inventaram, conheciam, de uma ou de outra forma, a seguinte regra de encadeamento: "quando se marcam na areia os pontos das redes de dois padrões-de-esteira-entrecruzada monolineares da classe A, de tal modo que elas tenham exatamente dois pontos em comum, então o novo padrão desenhado, utilizando o algoritmo da esteira-entrecruzada, em torno dos pontos da rede maior formada desta maneira, é também monolinear". Gerdes (2008) coloca a questão de como é que este conhecimento podia ter sido adquirido: se foi meramente um resultado empírico no sentido de que foi abstraído de experimentações com o encadear de tais redes de pontos ou, em contrapartida, esta regra foi, de uma ou de outra maneira, quase evidente em geral, tal como as três primeiras regras de encadeamento o são, ou se resultou talvez mais de alguma observação ou experimentação, completada por um raciocínio adequado (*ibidem*).

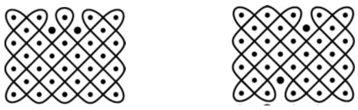
A6) Regra de eliminação

Segundo Gerdes (2008, p. 156), para além de regras de encadeamento já enunciadas, este povo conhecia, provavelmente, também algumas regras de eliminação. A primeira regra de eliminação diz o seguinte: "Quando se elimina um ponto de intersecção de duas partes da linha dum padrão-de-esteira-entrecruzada monolinear, então o padrão torna-se 2-linear".

Segue um exemplo da aplicação da regra de eliminação, na figura 2.48:

Figura 2.48: Exemplo de um esquema da regra de eliminação, em que se eliminou um ponto de interseção entre duas parte de uma linha (fonte: Gerdes, 2008)

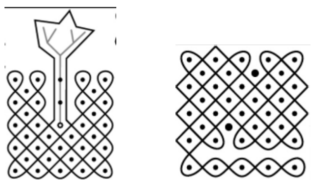
Quando se elimina depois um ponto de interseção, onde se cruzam as duas linhas obtidas, obtém-se, de novo, um padrão monolinear. No exemplo dado existem exactamente duas possibilidades de fazê-lo, de tal modo que o padrão novo obtenha uma simetria axial ou rotacional (figura 2.49) (Gerdes, 2008).



a b

Figura 2.49: Padrão novo com uma simetria axial ou rotacional, segundo a regra da eliminação (fonte: Gerdes, 2008)

Estas duas possibilidades encontram-se realizadas nos *Sona* apresentados na figura 2.50. Não se pode explicar a monolinearidade de ambos os padrões (figura 2.50.a e 2.50.b) com base numa das regras de encadeamento anteriormente analisadas, sendo que Gerdes (2008) tenha conjeturado que é possível que a descoberta dos dois padrões tenha sido puramente casual, mas parecendo-lhe, no contexto global dos *sona* pouco provável.

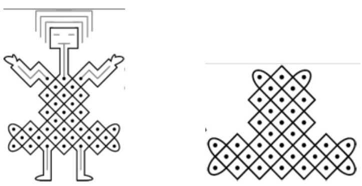


a b

Figura 2.50: As duas possibilidades realizadas em *sona*, segundo os padrões apresentados na figura 2.62 (fonte: Gerdes, 2008)

A7) Quinta regra de encadeamento (algoritmo da "esteira diagonalmente entrecruzada")

Como refere Gerdes (2008), uma vez que os padrões-de-esteira-entrecruzada de dimensões de nxn são compostos por n linhas fechadas, juntar (no sentido considerado) um quadrado de pontos, de dimensões de nxn, a uma 'rede poligonal monolinear de pontos' não afecta a sua monolinearidade. Entende-se por uma rede poligonal monolinear de pontos uma rede poligonal de ângulos de 90.º e de 270.º que, sob aplicação do algoritmo da esteira-entrecruzada, fica cercada por uma única linha fechada (Gerdes, 2008, p. 175). Exibem-se dois exemplos de *sona* construídos segundo a quinta regra de encadeamento, na figura 2.51.



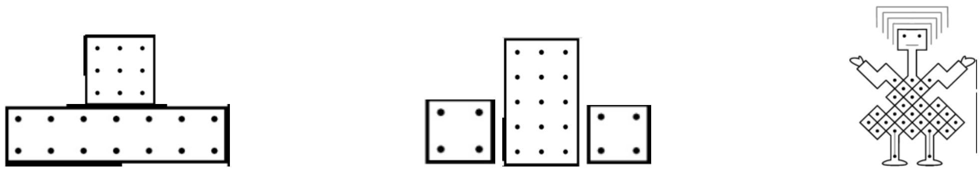
a b

Figura 2.51: *Sona* construídos a partir da 5.ª regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008)

Seguem-se dois exemplos de *sona* construídos a partir da 5.ª regra de encadeamento (figura 2.52 e 2.53).

1.º exemplo: Dançarino

Segundo Gerdes (2008, p. 176), uma possível aplicação desta regra de encadeamento encontra-se no *lusona* reproduzido na figura 2.52.c (Fontinha, 1983, p. 128, citado por Gerdes, 2008). Sem contar com as linhas orientadoras (pernas, braços, boca, olhos) e a ornamentação da cabeça, este *lusona* é monolinear e o padrão de base do *lusona* considerado é o de uma esteira entrecruzada (figura 2.52.c). Este mesmo autor afirma que a monolinearidade deste padrão-de-esteira-entrecruzada pode ser explicada – e assim ter sido inventado o padrão de base por um dos *akwa kuta sona* – como consequência da aplicação de um quadrado de dimensões de 3x3 a um padrão-de-esteira-entrecruzada de dimensões de 2x7 (figura 2.52.a) ou de dois quadrados 2x2 a um padrão-de-esteira-entrecruzada de 5x3 (figura 2.52.b).

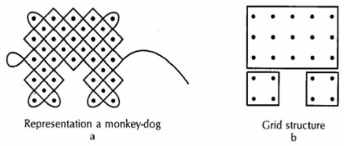


a b c

Figura 2.52: Explicação do padrão da figura 2.64.a, segundo a 5.ª regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2008)

2.º exemplo: Macaco

Outro exemplo da aplicação da quinta regra de encadeamento é apresentado por Gerdes (2007, p. 56), onde a monolinearidade do *lusona* da figura 2.53.a pode ser explicada com base na quinta regra de encadeamento: se se juntar duas redes de dimensões 2*2 (redes quadradas) a um retângulo com dimensões de números primos relativos entre si (no exemplo: dimensões 3*5), então a rede resultante conduz a um desenho monolinear.



a b

Figura 2.53- Outra aplicação da quinta regra de encadeamento (fonte: Gerdes, 2007, p. 56)

- Outras classes de *sona*

De seguida, aborda-se três exemplos de *sona*, que não se encaixam nas classes referidas anteriormente (Gerdes, 2008):

1.º exemplo: Casal deitado

Este exemplo de *lusona* monolinear (figura 2.54) foi construído a partir de ziguezagues do tipo ida-e-volta, que podem passar 'por cima – por baixo' de dois ou mais pontos de uma fila ou de uma coluna da grelha de pontos de referência (Gerdes, 2008).

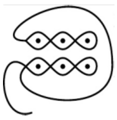


Figura 2.54: Casal deitado (fonte: Fontinha, 1983, p.146, citado em Gerdes, 2008, p. 69)

Segundo Gerdes (2008), a figura 2.55 representa mais dois *sona* pertencentes à mesma classe que o *lusona* representado na figura 2.54.

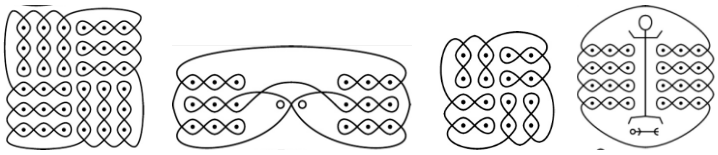


Figura 2.55: Quatro S*ona* que pertencem à mesma classe que *o lusona* da figura 2.54 (fonte: Gerdes, 2008)

2.º exemplo: Porco- espinho

Seguem-se dois pares de *sona* construídos com o mesmo algortimo (Fontinha, p.196, citado em Gerdes, 2008, p. 71) sendo que os *sona são* monolineares, não contando os espinhos acrescentados no fim da execução do desenho da figura 2.56.a. O *lusosona* reproduzido na figura 2.56.b é igualmente monolinear, se não se tomar em conta a cauda acrescentada no fim.

a b

Figura 2.56- *Sona* construídos segundo o mesmo algoritmo (fonte: Gerdes, 2008)

3.º exemplo: Galinha em fuga

Segundo Gerdes (2008), os *sona* reproduzidos na figura 2.57 representam o trajeto descrito por uma galinha selvagem quando perseguida, com várias dimensões do lusona (fonte: Dos Santos, 1961, p.48, citado por Gerdes, 2008). Os *akwa kuta sona* souberam provavelmente que o algoritmo correspondente leva a um padrão monolinear quando as dimensões da rede de pontos são iguais a dois números consecutivos, sendo o primeiro um número ímpar, maior ou igual a 3 (Gerdes, 2008).

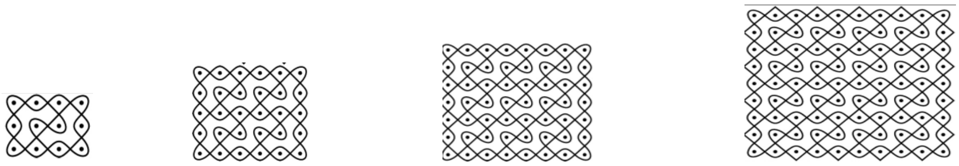


Figura 2.57:Versão de dimensões 3x4, 5x6, 7x8 e 9x10 do *lusona* galinha em fuga (fonte: Gerdes, 2008, p. 76)

- *Sona* construídos com o mesmo algoritmo

Segundo Gerdes (2007), a figura 2.58 mostra três pares de *sona* monolineares que pertencem à mesma classe, apesar da variação nas dimensões dos diagramas de pontos de cada um, mas o algoritmo usado para traçar os dois *sona* é o mesmo (*sona* que são construídos segundo o mesmo algoritmo):

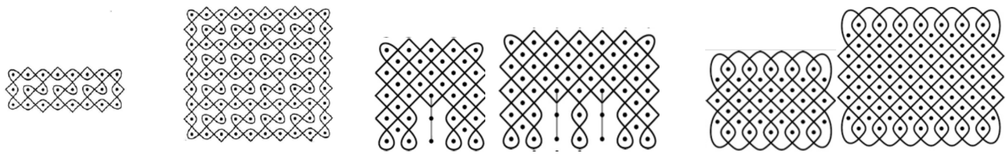


Figura 2.58- *Sona* construídos com o mesmo algoritmo geométrico (fonte: Gerdes, 2007, p. 54)

- Reconstrução de classes provavelmente perdidas. Possíveis extensões.

Segundo Gerdes (2008, p. 88), é provável que os *akwa kuta sona* tivessem descoberto determinados algoritmos geométricos com os quais construíam padrões monolineares. Através de experimentação investigariam para que dimensões das redes (retangulares) de pontos a aplicação dum dado algoritmo levava a padrões monolineares. Todavia existem *sona* que, embora satisfaçam certas regras de construção, permitindo uma variação das dimensões das redes de pontos, são únicos no sentido de que não se encontram na literatura etnográfica ampliações ou reduções destes padrões. Uma vez que a experimentação com algoritmos e dimensões é própria da tradição *cokwe* de desenho na areia, Gerdes (2008) afirma que é levado a supor que também no caso destes *sona* únicos, os *akwa kuta sona* tenham conhecido reduções e ampliações. Em seguida apresentam-se exemplos de tais *sona*, indicando, ao mesmo tempo, possíveis reduções e ampliações (monolineares), na figura 2.59.

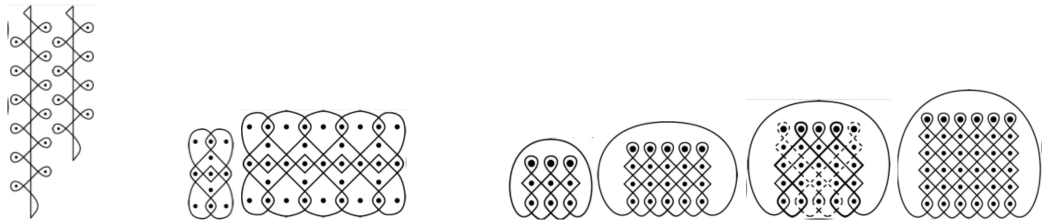


Figura 2.59: Possíveis reduções e ampliações de *sona* (fonte: Gerdes, 2008)

- S*ona* monolineares com uma forma básica triangular

A figura 2.60 mostra *sona* monolineares e que são semelhantes entre si: cada um apresenta um design básico de uma forma triangular (Gerdes, 2007, p. 54).

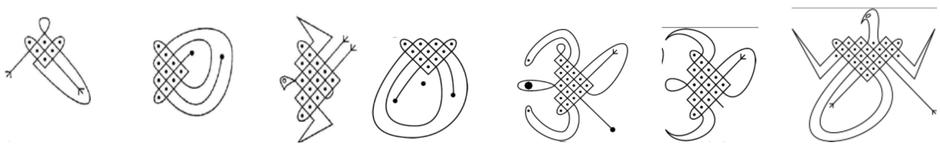


Figura 2.60. *Sona* com base triangular (fonte: Gerdes, 2007)

Gerdes (2007; 2008) acredita que os peritos dos desenhos *sona* que inventaram estes *sona*, provavelmente, começaram com padrões triangulares e que os transformaram em padrões monolineares, com a ajuda de um ou mais *loops*, laços (ou conexões) (exemplo na figura 2.61). Os padrões monolineares obtidos dessa maneira foram adaptados (talvez mais tarde do que outros) para poderem expressar as ideias que os desenhadores pretendiam transmitir através deles (os padrões monolineares assim obtidos foram topologicamente adaptados para poder exprimir as ideias envolvidas) (*ibidem*).

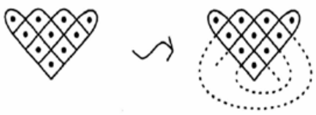


Figura 2.61: Transformação de um *sona* triangular num desenho monolinear (fonte: Gerdes, 2007, p. 55)

- Casos em que a simetria ou a monolinearidade é quebrada

Quando Gerdes (2007, p. 56) analisou e reconstruiu elementos da tradição *sona*, encontrou alguns *sona* que não contemplam os valores culturais de simetria e de monolinearidade e refere que, por vezes, a simetria ou a monolinearidade foram quebradas para dar um significado específico a um desenho *lusona*. Ainda segundo Gerdes (2007), tal situação pode ter resultado de erros, de enganos ou de imperfeições. Os peritos em desenhos podiam cometer alguns destes erros, dado serem pessoas idosas. Estes afirmaram que quando eram homens jovens eram melhores desenhadores de *sona*. O mesmo autor refere que se pode estar em contato com erros na transmissão dos conhecimentos *sona* de uma geração para outra ou com erros por parte do historiador, que tem pouco tempo para fazer as suas cópias, pois os peritos em desenhos limpam os seus desenhos imediatamente depois de concluírem as suas histórias. Este limpar era uma forma de proteger os seus conhecimentos e de manter o monopólio do conhecimento *sona* e que existe outra razão para os erros no reportório *sona*: uma forma de resistência cultural (Gerdes, 2008). Os peritos em *sona* poderiam estar a cometer erros de forma consciente para enganar o relator, ou seja, o homem branco, associado à rede de escravatura, administração colonial e ao cristianismo - e assim protegiam os seus secretos conhecimentos (*ibidem*). No caráter secreto e de monopólio da tradição *sona* recai uma razão para a sua gradual extinção. Assim que o perito em desenhos *sona* era escravizado, o conhecimento desaparecia da sua comunidade. Segundo Gerdes (2007), o estudo desta tradição de desenhos *sona*, foi seriamente ameaçada de extinção durante o período colonial, não é só interessante por razões históricas. Nesse sentido, este autor defende que a integração desta tradição *sona* nos currículos africanos como noutras partes do mundo, contribuirá para a reanimar e valorizar esta velha prática, reforçará a apreensão do valor da herança artística e científica do continente africano (*ibidem*). O mesmo autor afirma que poderá, igualmente, contribuir para desenvolver uma educação matemática mais produtiva e mais criativa e por outro lado, a análise destes desenhos estimula o desenvolvimento de novas áreas de investigação matemática (*ibidem*). Em termos de conteúdos matemáticos, Gerdes (2008) aponta exemplos de explorações educacionais e matemáticas da Geometria de Africa, nomeadamente, da geometria *sona*, são, ao nível de: Polinómios; Padrões; Simetrias; Semelhança de figuras; Máximo divisor comum entre dois números; Semelhança de figuras; Soma de números naturais (progressão artimética); Matrizes; Figuras geométricas, etc..

Capítulo 3 - Metodologia

Nota Introdutória

Neste capítulo, descrevem-se as opções metodológicas tomadas no estudo realizado, começando por fundamentar e caraterizar a opção por uma metodologia de natureza predominantemente qualitativa, assumindo o *design* de investigação ação. Fundamentam-se, igualmente, os instrumentos de recolha de dados implementados. Descreve-se, de seguida, uma abordagem teórica à investigação qualitativa em educação, incidindo particularmente na investigação ação qualitativa. É feita uma breve descrição dos participantes na investigação (sujeitos/alunos e investigador/professor) e são ainda referidas as estratégias de recolha de dados, mormente observação direta e participante, registos escritos dos alunos, questionários e testes de avaliação, bem como a metodologia seguida na análise dos dados e a estratégia pedagógica utilizada.

3.1 Etapas do processo de investigação

De acordo com Quivy & Campenhoudt (1992), o processo de investigação em Educação é composto por três fases - fase de ruptura, fase de construção e fase de verificação - contemplando cada uma delas etapas específicas. A fase de ruptura contempla três etapas: Etapa 1- Pergunta de Partida; Etapa 2- Exploração (Leituras e Entrevistas Exploratórias); Etapa 3- Problemática. Já a fase de construção inclui uma única etapa: Etapa 4 - Construção do modelo de análise. Por fim, a última fase, a fase de verificação, abarca três etapas: Etapa 5- Recolha de dados; Etapa 6 - Análise dos dados e Etapa 7- Conclusões.

Assim, um trabalho investigativo deverá começar com a elaboração/formulação de uma pergunta de partida que enuncie todo o projeto e que seja a linha condutora da investigação. Com a especificação desta pergunta, como referem Quivy & Campenhoudt (2005, p. 44), *(...) o investigador tenta exprimir o mais exactamente possível aquilo que procura saber, elucidar, compreender melhor*. Nesta mesma linha, Pardal & Correia (1995, p. 13) afirmam que *A investigação parte de um problema, pergunta de partida operacional, precisa, unívoca e realista, formulada com intenção de compreensão ou explicação da realidade – do objecto de estudo*. Deste modo, uma das etapas mais importantes de um projeto de investigação é a definição do problema ou questão em estudo, sendo que este deve ser claro, executável e pertinente (Quivy & Campenhoudt, 2005).

3.2 Formulação do problema, questões e objetivos da investigação

O insucesso na disciplina de matemática é um dos problemas com que todos os intervenientes do processo de ensino-aprendizagem se deparam e que tem preocupado muitos investigadores por todas as suas implicações escolares e sociais. Dentro deste âmbito, e como já referido anteriormente, sentimo-nos desafiados a desenvolver uma investigação no âmbito da problemática da integração de uma perspetiva etnomatemática no processo de ensino e aprendizagem da matemática, na medida em que entendemos que a introdução de uma vertente cultural no ensino da matemática pode contribuir para a aprendizagem de conteúdos matemáticos e motivar os alunos para a disciplina.

Deste modo, tomando a Geometria *Sona* como um recurso com potencialidades ao nível da Educação Matemática, consideramos que importa dar resposta à seguinte questão:

Em que medida o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem em que se exploram aspetos socioculturais da matemática, com recurso à geometria *Sona*, contribui para a aprendizagem das isometrias, ao nível de conhecimentos, capacidades e ao nível atitudinal e afetivo?

Desta grande questão emergem como orientadoras do estudo as seguintes subquestões:

(Q1) - Haverá contributos efetivos das atividades que explorem aspetos sócio-culturais da matemática para o desenvolvimento conceptual em relação à disciplina?

(Q2)- Haverá contributos efetivos das atividades que explorem aspetos sócio-culturais da matemática para o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina e para a apreciação desta?

(Q3)- De que modo se estabelece a relação entre as tarefas com o contexto sócio-culturais e a motivação para a realização de atividades matemáticas?

Bardin (2008, p. 124) refere que O *objectivo é a finalidade geral a que nos propomos (...), o quadro teórico e/ou pragmático, no qual os resultados obtidos serão utilizados*.

Clarificada a problemática de investigação e para responder à questões formuladas, definiram-se como objetivos de estudo:

- Conceber, desenvolver e avaliar uma sequência/unidade didática integrando desenhos tradicionais africanos (desenhos *sona*) para a abordagem das isometrias no 9.º ano de escolaridade;
- Evidenciar o valor da geometria *sona* para a aprendizagem das isometrias;
- Analisar se a introdução em sala de aula de contextos socioculturais contribui para motivar os alunos para a realização de atividade matemática e para a valorização do papel da matemática na vida social e cultural.

3.3 Metodologia

Em função do problema e dos objetivos formulados, a investigação que se pretende desenvolver impõe uma abordagem virada para o estudo de situações de intervenção conduzidas pela investigadora. A investigação insere-se no âmbito de um paradigma descritivo e interpretativo e o *design* da mesma assume o formato de investigação ação com um enfoque metodológico predominantemente qualitativo, ainda que se utilize um enfoque quantitativo para uma mais eficaz descrição dos dados. O método quantitativo, na opinião de Pardal & Correia (1995), privilegia o recurso a instrumentos e a análise estatística. Deste modo, as metodologias quantitativas baseiam-se na oportunidade de medir os fenómenos sociais. Bardin (2008, p. 141) refere que a abordagem quantitativa *obtém dados descritivos através de um método estatístico* e carateriza este tipo de análise como sendo *mais objectiva, mais fiel e mais exacta, visto que a observação é mais bem controlada*.

3.3.1 Investigação qualitativa

Em educação, têm vindo a ganhar bastante aceitação e credibilidade as abordagens de cariz qualitativo (Ludke & André, 1986), que apresentam, segundo Bogdan & Biklen (1994, pp.47-50), cinco caraterísticas:

> *A fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo; os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; a análise dos dados é feita de forma indutiva; e o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.*

Ainda segundo os mesmos autores, na investigação qualitativa o investigador comporta-se mais de acordo com o viajante que não planeia do que com aquele que o faz de forma meticulosa. Enquanto a investigação quantitativa utiliza dados de natureza numérica que lhe permitem provar relações entre variáveis, a investigação qualitativa utiliza principalmente metodologias que possam criar dados descritivos que lhe permitirá observar o modo de pensar dos participantes numa investigação. Merriam (1988) afirma que os intervenientes da investigação qualitativa não se reduzem a variáveis isoladas mas são vistos como parte de um todo no seu contexto natural. Na redução das pessoas a dados estatísticos verifica-se que certas caraterísticas do comportamento humano são ignoradas. A mesma autora refere que para se conhecer melhor os seres humanos, ao nível do seu pensamento, deverá utilizar-se para esse fim dados resultantes dos registos e das anotações pessoais de comportamentos observados e obtidos num contexto natural.

Bogdan & Taylor (1986) referem que o investigador, nas metodologias qualitativas, deve estar completamente envolvido no campo de ação dos investigados, dado que, na sua essência, este método de investigação baseia-se principalmente em conversar, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes. Acrescentam, ainda, que a investigação qualitativa, por permitir a subjetividade do investigador na procura do conhecimento, implica que exista uma maior diversificação nos procedimentos metodológicos utilizados na investigação.

A investigação qualitativa de índole descritiva-interpretativa enquadra um conjunto de estratégias investigativas que engloba um conjunto de competências, pressupostos e práticas que o investigador adopta quando se move do paradigma respetivo para o mundo empírico, nas quais se incluem, entre outras, o estudo de caso, as técnicas fenomenológicas e etnográficas, a observação participante e não participante e a investigação ação (Denzin & Lincoln, 2000). Cada uma destas estratégias privilegia um conjunto de técnicas e instrumentos específicos de recolha de dados (entrevista, observação, documentos, notas de campo, etc.) que, para uma melhor compreensão do problema, devem ser acompanhadas do desenvolvimento de um amplo conjunto de práticas interpretativas interrelacionadas, que permitam descrever as rotinas e os momentos problemáticos e os significados das vidas dos indivíduos (Denzin & Lincoln, 2000). De acordo com Erickson (1988), as abordagens interpretativas permitem um maior entendimento critico das situações e dos fenómenos educativos.

A opção por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa permite um estudo mais aprofundado dos fenómenos que decorrem em contextos de grande complexidade. Daí a necessidade de o investigador observar, procurar entender e interpretar as ações e as interações humanas dentro do seu próprio contexto.

Considera-se que pela problemática, questões e objetivos expostos e apoiados nas cinco características que Bogdan & Biklen (1994) referem em relação à investigação qualitativa, o presente estudo insere-se numa investigação de cariz qualitativo. De facto, o mesmo decorrer no ambiente natural da escola, a investigadora-docente de matemática é a principal agente na recolha de dados; os dados são essencialmente de caráter descritivo; o processo em si tem uma grande importância na procura de respostas às questões de investigação; a análise dos dados será feita de forma indutiva e, finalmente, a investigadora-docente vai interessar-se, acima de tudo, por tentar melhorar a sua própria prática, através de uma ação comprometida, intencional e reflexiva, que contribua para minorar o problema do insucesso escolar e a falta motivação e de empenho dos alunos.

Seguiu-se, por isso, uma abordagem investigativa qualitativa, de cunho descritivo e interpretativo, por ser uma perspetiva centrada na questão dos significados atribuídos pelos indivíduos aos acontecimentos e aos objetos, nas suas ações e interações no âmbito de um contexto social e na elucidação e exposição desses significados pelo investigador.

3.3.2 Investigação ação

Em geral, uma investigação usa conceitos, teorias, linguagem, técnicas e instrumentos com o intuito de responder a problemas e interrogações que se levantam nos mais diversos âmbitos de trabalho. Segundo Quintas (1998), na investigação sócio-educativa encontra-se uma grande variedade de metodologias, destacando, como sendo as que mais interesse despertam atualmente, a investigação ação, a investigação participativa e a investigação colaborativa/cooperativa.

Vamos debruçar-nos sobre a metodologia da investigação ação, por ser a metodologia de investigação que se enquadra, no nosso entender, pelas suas caraterísticas, no desenvolvimento deste estudo. A investigação ação considera o processo de investigação em espiral, interativo e focado num problema. Cortesão & Stoer (1994) referem que através da metodologia de investigação ação, o docente poderá produzir dois tipos de conhecimentos científicos: um conhecimento que se baseia no docente como sendo investigador e outro que se baseia no desenvolvimento de dispositivos pedagógicos, ou seja, o professor como educador. Dick (2000) refere que a investigação ação é uma metodologia com duplo objetivo: de ação e de investigação, no sentido de obter resultados nas duas vertentes: na vertente de ação para obter mudanças numa comunidade, numa organização, num programa e na vertente de investigação no sentido de aumentar a compreensão por parte do investigador, do cliente e da comunidade. Trilla (1998) afirma que a investigação ação é uma metodologia orientada para a melhoria da prática nos diversos campos da ação e a aprendizagem a partir das consequências dessas mudanças. Assim, o duplo objetivo da investigação ação é, por um lado, obter melhores resultados naquilo que se faz e, por outro, facilitar o aperfeiçoamento das pessoas e dos grupos com que se trabalha. O mesmo autor refere que esta metodologia permite a participação de todos os implicados e desenvolve-se em espiral de ciclos de planificação, ação, observação e reflexão. Trata-se, assim, de um processo sistemático de aprendizagem orientado para a *praxis*, exigindo que esta seja submetida à prova, permitindo dar uma justificação a partir do trabalho, mediante uma argumentação desenvolvida, comprovada e cientificamente examinada (*ibidem*). Pérez Serrano (2000) acrescenta que a investigação ação é um tipo de investigação de cariz qualitativo que pode ser visto como um processo aberto e contínuo de reflexão crítica sobre a ação. Assim, o grande objetivo desta metodologia é a reflexão sobre a ação a partir da mesma, ou seja, a sua finalidade consiste na ação transformadora da realidade.

Brown & McIntyre (1981, referidos por Chagas, 2005) referem que a investigação ação é uma metodologia muito apelativa e motivadora, dado que se centra na prática e na melhoria das estratégias utilizadas, levando a uma eficácia da prática muito maior. A investigação ação deve estar definida por um plano de investigação e de ação, suportado por um conjunto de métodos e regras (chamadas de fases neste processo metodológico). Um processo de investigação ação, segundo Pérez Serrano (1994, apresentado por Trilla, 1998), segue quatro fases: 1. Diagnosticar ou descobrir uma preocupação temática, isto é o "problema". 2. Construção do plano de ação. 3. Proposta prática do plano e observação de como funciona. 4. Reflexão, interpretação e integração dos resultados. Replanificação.

Já para Kuhne & Quigley (1997, referidos por Almeida, 2005), um ciclo de investigação ação envolve três fases: planificação, ação e reflexão (representada esquemáticamente na figura 3.1). Ou seja, a investigação ação pressupõe a definição do âmbito e planeamento, antes da ação, seguido de revisão, crítica e reflexão.

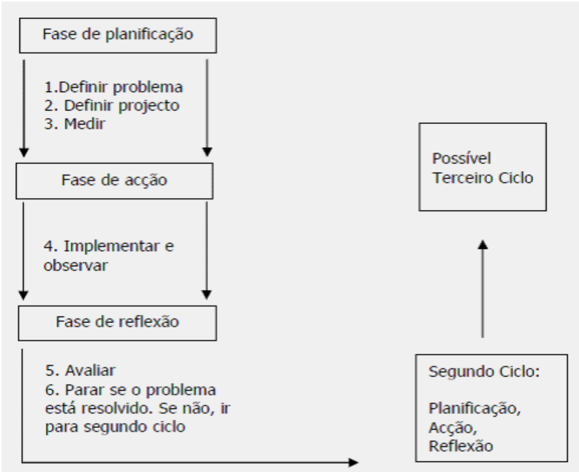


Figura 3.1. – Fases da investigação ação apresentada por Kuhne & Quigley (1997).
Fonte: Almeida (2005)

Como afirmam Santos *et al.* (2004), esta metodologia facilita um misto de capacidade de resposta e de rigor nos requisitos da investigação e da ação; proporciona uma vasta participação geradora de responsabilidade e envolvimento; produz mudanças não esperadas e conduz a processos inovadores. Quase todos os autores consultados são unânimes de que a investigação ação se desenvolve de forma cíclica ou em espiral, querendo com isso dizer que as soluções aos problemas iniciais dão origem a possibilidades de mudança a serem implementadas num ciclo seguinte.

Neste estudo, ao utilizar-se esta metodologia pretende-se concretizar mudanças na forma e na dinâmica da intervenção educativa que se realiza no dia a dia escolar. Esta intervenção, capaz de produzir mudanças, só é possível se toda a comunidade educativa estiver implicada no mesmo dinamismo de ação e de intervenção. Mas mudar exige mudar mentalidades, formas de estar e de atuar, o que na opinião de Sanches (2005) se torna complexo, dado que tem como objetivo melhorar a vida das pessoas, podendo colocar em conflito as suas crenças, os seus estilos de vida e os seus comportamentos. Acrescenta, ainda, que para que essa mudança seja real, torna-se preciso compreender a maneira como as pessoass envolvidas vivem a sua situação e implicá-las nessa mesma mudança (*ibidem*). O mesmo autor refere ainda que a investigação ação vai permitir que os destinatários também assumam as responsabilidades de saber e de decidir quais as mudanças que pretendem efetuar (*ibidem*). É da análise destas decisões que se pode dar o próximo passo no processo da investigação ação sendo que a estratégia mais eficaz para que ocorram as necessárias mudanças na comunidade educativa será o envolvimento de todos os intervenientes, numa dinâmica de ação – reflexão - ação (*ibidem*).

Quintas (1998) considera que esta metodologia pode auxiliar o docente a fomentar estratégias e métodos para que, desta forma, a sua atuação seja mais adequada, nomedamente por propiciar técnicas e instrumentos de análise da realidade e formas de recolha e análise dos dados. O maior contributo desta metodologia é favorecer uma reflexão sistemática sobre a prática educativa com o objetivo de a transformar e de a melhorar, sendo este o grande desafio que se impõe a todos que estão empenhados e envolvidos nesta dinâmica de ação na intervenção educativa. Para Matos (2004), associar a investigação ação à prática educativa do docente significa tomar consciência das questões críticas relativas à aula, criar predisposição para a reflexão, assumir valores e atitudes e estabelecer congruência entre as teorias e as práticas.

3.3.3 *Design* da investigação

A fase inicial deste estudo consistiu na caraterização do público-alvo com recurso a uma ficha biográfica preenchida no início do ano letivo 2011/12. Esta ficha tinha como objetivo principal recolher alguns dados sobre os alunos e o seu agregado familiar e a sua relação com a matemática. No dia 27 de fevereiro de 2012, deu-se início à investigação propriamente dita com a realização de um teste diagnóstico incindindo sobre as transformações geométricas já estudas pelos alunos, a saber: translação, rotação, reflexão e simetria axial. Todos os momentos foram alvo de observação direta da investigadora, suportada pelo registo de ideias ou comentários em notas de campo. Para dar resposta às finalidades e objetivos gerais de aprendizagem para o ensino da matemática no ensino básico, foi planificada uma sequência didática integrando diferentes experiências de aprendizagem. Como já foi referido, a planificação incidiu sobre o tópico isometrias, integrado no domínio da Geometria, privilegiando-se a geometria *Sona* como recurso de ensino e aprendizagem. Para planificar as tarefas, fez-se uma pesquisa dos recursos etnomatemáticos relacionados com a geometria *sona*, tendo-se criado uma sequência de tarefas, originais e/ou adaptadas a partir de outras disponíveis na bibliografia consultada. Numa sessão inicial, foi projetado um curto *powerpoint* com informações e imagens sobre as principais caraterísticas dos desenhos *sona* e a sua história (anexo 18). Após o que, foram implementadas as tarefas planificadas, sintetizadas numa ficha de tarefas (anexo 13). Ainda que o tópico simetrias não faça parte do Programa de 9.º ano (ME-DEB, 1991), considerou-se relevante conectar as noções de isometria e de simetria, sendo abordadas, em particular, as noções de simetria de reflexão e de rotação, apoiados pela ficha de apoio *sona* (anexo 7). As sessões de implementação da sequência didática prolongaram-se até à última semana de aulas do 2.º período e foram alvo de observação direta da investigadora, que registou, em notas de campo, os momentos, reações, comportamentos e comentários mais significativos dos alunos e da docente. Com o objetivo de averiguar a compreensão e assimilação dos conhecimentos dos alunos a nível das transformações no plano e das simetrias foi aplicado um teste de avaliação formativo. A sequência didática incluiu, ainda, um desafio em que era solicitado aos alunos a criação de um desenho *sona* original, respeitando as regras de traçado e em que, intencionalmente, existisse pelo menos uma isometria. A sequência didática ficou concluída com a realização de um teste de avaliação sumativo, aplicado no início do 3.º período e a aplicação de um questionário aos alunos. Na figura 3.2 apresenta-se um esquema alusivo ao *design* investigativo.

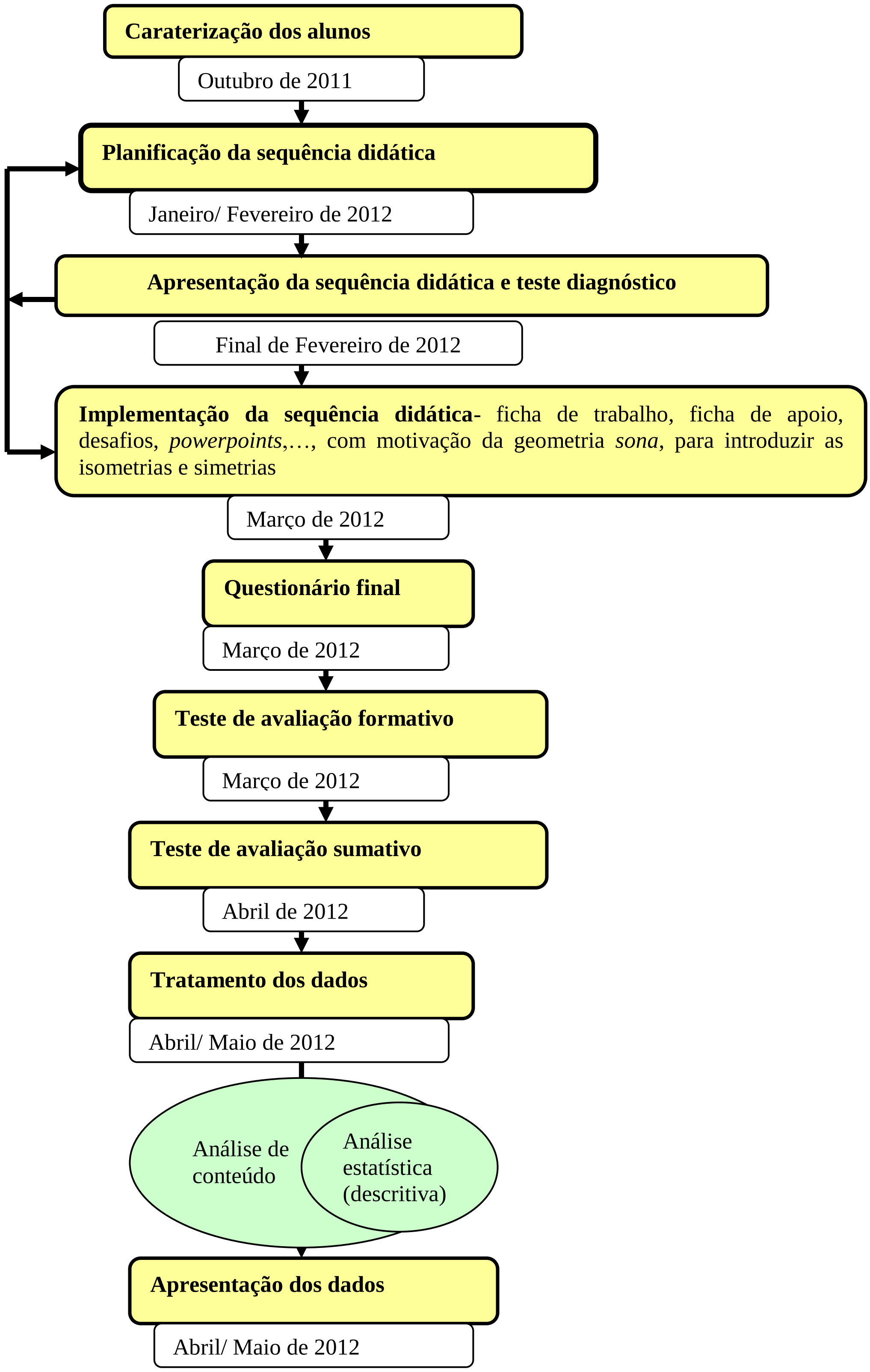


Figura 3.2: *Design* investigativo

3.4 Participantes

Neste estudo participaram os alunos de uma turma de 9.º ano de escolaridade de uma escola do centro de Portugal onde a professora desempenhou simultaneamente o papel de investigadora. Uma vez que se pretendia valorizar os saberes culturais dos alunos, optou-se por definir os seguintes critérios para a seleção da turma: a investigadora ser simultaneamente professora e diretora de turma, conseguindo assim maior proximidade com os encarregados de educação e um conhecimento mais completo dos alunos individualmente e da turma como um todo e para além da disciplina de Matemática, a investigadora ser responsável pela docência da área curricular não disciplinar Formação Cívica, o que possibilitou a observação dos alunos em ambientes de sala de aula com diferentes níveis de formalidade, conseguindo assim fontes de informação diferenciadas relativamente ao entendimento da cultura de turma.

Iremos, de seguida, fazer a caraterização do ambiente escolar e dos participantes no estudo (alunos e docente/investigadora).

Este estudo foi realizado numa escola EB 2, 3, TEIP[12] que faz parte dum agrupamento vertical de escolas que integra, além da referida, que é a escola sede do agrupamento, três escolas do 1.º Ciclo do ensino básico. Este agrupamento situa-se no Concelho de Sintra, numa zona residencial. O número médio de discentes do agrupamento nos últimos anos nunca foi inferior a 1200 alunos. De acordo com o Projeto Educativo, a escola está inserida numa zona mediamente urbana com alta densidade populacional. As caraterísticas geográficas referidas constituem fatores negativos face ao desenvolvimento escolar e também ao desenvolvimento em geral. Nos últimos anos, tem-se assistido a um crescimento comercial considerável, acompanhando, desta forma, a tendência geral do país para a crescente terciarização. No que diz respeito à estrutura de emprego da população abrangida pelo agrupamento, constata-se que a maioria da mão de obra se encontra no setor secundário, apesar de se verificar uma grande percentagem também no setor terciário. Os agregados familiares apresentam, na sua maioria, rendimentos *per capita* bastante baixos e, consequentemente, um grande número de discentes beneficiam de apoios da ação social escolar. Além disso, tanto a nível cultural como social, estes agregados são de nível médio/baixo. No que concerne à escolaridade, verificam-se índices de escolaridades baixos nos agregados familiares, sendo raros os contextos em que os pais possuem o 9.º ano de escolaridade ou mais e existindo ainda algum analfabetismo. A população não tem, em geral, qualquer formação profissional adequada. Os Encarregados de Educação do sexo masculino são predominantemente trabalhadores

12 Os Territórios educativos de intervenção prioritária (TEIP) foram lançados pelo ME, em 1996, através do Despacho 147-B/ME/96, tendo sido complementado pelo Despacho Conjunto 73/SEAE/SEEI/96. O principal propósito desta medida foi a promoção da igualdade no acesso e no sucesso educativo dos alunos do ensino básico que indiciam exclusão, operacionalizada através de um modelo de gestão dos estabelecimentos de ensino abrangidos por uma determinada unidade geográfica, que tornaria possível uma maior autonomia e uma descentralização das decisões inerentes ao processo educativo.

na área da construção civil (pedreiro, calceteiro, serralheiro, carpinteiro, trolha, pintor, eletricista e picheleiro) e do sexo feminino são essencialmente domésticas e profissionais de limpezas domésticas. A taxa de desemprego na região é bastante significativa. Esta situação associa-se ainda à problemática do trabalho temporário e da baixa qualificação profissional da população adulta. É importante destacar ainda que o número de crianças que frequentam o agrupamento de escolar e que vivem em famílias de acolhimento ou em instituições de acolhimento de crianças e jovens em risco tem vindo a aumentar nos últimos anos, constituindo um grande desafio para a instituição. Estes alunos provenientes doutros sistemas de ensino, normalmente oriundos de contextos socioeconómicos desfavorecidos e problemáticos, apresentam elevadas taxas de insucesso e desmotivação face à escola e deficiente integração social. Ao longo dos últimos anos, tem-se registado uma diminuição da taxa de abandono escolar, contudo registam-se ainda alguns casos nos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico. Estas situações de abandono estão normalmente associadas ao baixo nível sócio-cultural e económico, à desresponsabilização das famílias face à vida escolar dos seus educandos, invertendo-se muitas vezes os papéis familiares, às fracas expetativas perante a escola, à facilidade de encontrar um posto de trabalho, apesar de ser precário, pouco qualificado e, por vezes, ilegal e à incapacidade do sistema de ensino para encontrar alternativas a nível escolar para estes jovens.

Em relação à disciplina de matemática, muitos alunos apresentam falta de bases de anos anteriores, uma quase total falta de estudo e de empenho; desinteresse pela disciplina e pela escola, falta de concentração e de atenção nas aulas. A maioria não realiza os trabalhos de casa pedidos pelos docentes. Alguns destes, inclusive, apresentam um défice cognitivo e a maioria não apresenta raciocínio matemático. Sentem dificuldades na assimilação e no relacionamento de conteúdos matemáticos dados com os novos e não sabem aplicar esses conhecimentos a situações da vida real. A maioria recorre à memorização e não se esforça para compreender a matéria (desistem de imediato a cada dificuldade encontrada). As turmas são numerosas, o que não permite um ensino mais individualizado, como seria desejável. Além disso, alguns alunos não possuem regras e comportamentos adequados para uma sala de aula, provocando que os docentes gastem bastante tempo a disciplina-los e a incutir hábitos de estudo e de comportamento. Alguns alunos são oriundos de famílias destruturadas e com pais ausentes, dado que provêm de países de origem africana e de outros continentes. Alguns alunos apresentam falta de motivação escolar e não tem objetivos escolares e pessoais, não se esforçando. Além disso, carecem de acompanhamento escolar e afetivo dos Encarregados de Educação. Alguns destes alunos provêm de sistemas escolares diferentes do de Portugal, não conseguindo acompanhar o grau de dificuldade e de exigência com que são confrontados. Determinados alunos apresentam dificuldades na língua portuguesa, muito particularmente, na interpretação dos enunciados matemáticos. Por fim, dada a quantidade de culturas, existem vários conflitos entre os alunos, dentro e fora da sala de aula. A degradação da escola e das salas de aula prejudica igualmente o rendimento escolar dos alunos, que já por si têm muitas dificuldades. Frequentemente, os alunos não conseguem perceber o que se regista no quadro, fazendo com que estes não se sintam motivados e percam demasiado tempo a passar para o seu caderno diário. Por fim, a escola não possui material didático e pedagógico diversificado e apelativo para os alunos e as condições bastante degradada da escola contribuem negativamente para o sucesso escolar.

Após esta caraterização da escola e da sua população escolar, passemos aos alunos participantes no estudo.

O estudo foi realizado numa turma constituída por 24 alunos a frequentar o 9.º ano de escolaridade no ano letivo 2011/12. A partir da análise realizada aos dados pessoais dos alunos verifica-se que 29% são do sexo feminino e 71% do sexo masculino. A idade dos alunos inquiridos varia entre os 14 e os 19 anos e a idade média é de 14,7 anos. Em relação ao percurso escolar dos discentes, regista-se que 42% dos alunos já teve alguma retenção ao longo do seu percurso escolar. Na caraterização dos discentes que participaram no estudo, tem-se também em atenção a qualificação académica dos seus pais. Constata-se que os pais dos discentes têm um nível baixo de habilitações literárias, uma vez que 21% só frequentaram ou concluíram o primeiro ciclo, enquanto apenas 25% tem qualificações ao nível do ensino secundário e nenhum frequentou o ensino superior. É também importante analisar as classificações dos discentes inquiridos, no que diz respeito à classificação interna obtida no final do 8.º ano. Constata-se que dos 24 alunos que frequentaram o 8.º ano em 2010/11, 78% obtiveram uma classificação inferior a três a nível interno.

Deste modo, depois de realizada a caraterização dos alunos que participaram neste estudo, resta apenas elaborar uma pequena caraterização da professora - investigadora.

A docente da turma, licenciada em Ensino de Matemática pela Universidade de Aveiro, tem 13 anos de lecionação, em vários níveis de ensino: 2.º ciclo, ensino secundário recorrente e 3.º ciclo do ensino básico. Integrou vários projetos e clubes das escolas por onde passou. Lecionou a disciplina de Matemática e de Informática no 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, foi Diretora de Turma, docente de Formação Cívica, de Estudo Acompanhado e de Área-Projeto. Esteve também envolvida na lecionação de Matemática a alunos de Cursos do Ensino Profissional, foi tutora de duas turmas e formadora de Matemática para a Vida, no Curso de Novas Oportunidades. Desde 2009, encontra-se efetiva na escola onde se efetuou a investigação, tendo lecionado a disciplina de matemática em todos os níveis do 3.º Ciclo do Ensino Básico. No ano em que desenvolveu o estudo, exerceu o cargo de Diretora de Turma e lecionou a disciplina de Matemática e de Formação Cívica à mesma turma. O fato de estar com os alunos em várias disciplinas permitiu uma grande proximidade na relação com os alunos. Além disso, adiciona-se que a investigadora é docente de Matemática desta turma há três anos. Este amplo contacto com os alunos pode constituir-se como uma vantagem, dado haver um maior e mais diversificado conhecimento dos intervenientes no estudo. Além disso, a investigadora-docente nunca será considerada um elemento estranho ou perturbador do ambiente na sala de aula. Segundo Bogdan & Biklen (1994), a investigação educativa pode tirar vantagens da relação de aproximidade entre o investigador e o objeto de estudo. A investigadora, neste método, é o principal meio de recolha de dados e torna-se, assim, um elemento crucial no desenvolvimento e culminar deste estudo. Esta, idealmente, deverá estar totalmente envolvida no ambiente em que ocorre a investigação, e deverá ser capaz refletir sobre a mesma da forma o mais isenta possível.

A Diretora da escola, a quem explicámos as principais caraterísticas do trabalho que pretendíamos desenvolver e os seus objetivos, para além de concordar que o projeto se realizasse na escola, mostrou um grande interesse em facilitar condições que o pudessem apoiar (anexo 01). Os alunos e os encarregados de educação mostraram-se bastante receptivos ao projeto que se pretendia realizar, cujas principais caraterísticas foram explicadas no início da investigação empírica, tendo sido entregue uma folha contendo toda a informação sobre aspetos relacionados com a participação do seu educando (anexo 02). Apesar de se registar, por parte de alguns pais, alguma dificuldade em perceber as informações enviadas para casa, certamente, decorrente do seu baixo nível escolar, todos deram autorização para que os seus filhos colaborassem em todas as atividades que o projeto poderia vir a envolver.

3.5 Análise de dados

Bodgan & Biklen (1994, p. 205) referem que a análise de dados é:

> *(...) o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou.*

A análise de dados é o processo de averiguação e organização sistemático de todos os materiais que foram acumulados pela recolha, com o objetivo de promover a compreensão dos mesmos. Nesse processo importa realçar e reconhecer aspetos essenciais e fatores chave. De acordo com Bardin (1995, p. 38), a análise de dados é um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens. Por sua vez, Bogdan & Biklen (1994, p. 205) referem que essa análise *envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões (…) e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros*. Assim, torna-se necessário, após a recolha de dados, identificar com pormenor padrões que os permitam categorizar, de modo a que possam ser explorados tendo em vista o seu enquadramento no esclarecimento das questões em estudo. Essa reflexão deverá acompanhar todo o processo, na tentativa de não deixar acumular dados sem uma prévia análise, promovendo a sua gradual organização e gerando conceitos e categorias. Deste modo, a finalidade da análise dos dados é organizar, fornecer estrutura e extrair significado dos dados da investigação. Segundo estes mesmos autores, a análise de dados é um processo de compreensão e de sistematização da informação que foi recolhida, com o intuito de responder às questões da investigação, transportando o investigador das descrições vagas até aos produtos finais. Assim, a análise de dados inicia-se no momento da recolha e organização, mas é realizada de forma mais profunda e atenta após esses momentos, pressupondo sempre os princípios de uma investigação qualitativa e as questões de investigação.

Como atrás referido, a problemática do estudo, da qual decorreram as questões e objetivos já apresentados, determinou a escolha de uma metodologia de índole predominantemente qualitativa, de cariz descritivo e interpretativo. Neste quadro, não interessa medir, analisar relações causais ou correlacionais entre as variáveis, provar hipóteses e estabelecer leis gerais – pressupostos de uma perspectiva de investigação positivista, de índole quantitativa (Denzin & Lincoln, 2000). Segundo Patton (2002, p. 14), os procedimentos usados neste tipo de investigação incidem na *utilização de medidas estandardizadas para que a multiplicidade de perspectivas e experiências dos sujeitos se enquadrem num número limitado de categorias pré-determinadas às quais são atribuídos números*.

Apesar da opção por uma metodologia qualitativa, entendeu-se que o recurso a técnicas de estatística descritiva simples contribui para compreender, explicar ou aprofundar a realidade em estudo. Assim, com o intuito de adquir uma visão global da turma, das suas caraterísticas e desempenho, aplicaram-se alguns procedimentos de estatística descritiva aos dados provenientes do questionário final aplicado aos alunos, dos vários testes implementados aos alunos- teste diagnóstico, teste de avaliação formativo e teste de avaliação sumativo. Para tal, recorreu-se aos programas Statistical Package for the Social Sciences (SPSS 17.0) e Excel para construção de tabelas de frequências absolutas ou relativas e de representações gráficas.

Numa investigação qualitativa, após o término da recolha dos dados, é necessário proceder-se à analise do seu conteúdo, de forma a encontrar uma resposta à pergunta de partida desta investigação e perceber se os objetivos foram ou não atingidos. Para tal, fez-se uma leitura atenta e cuidadosa de todos os documentos, de forma a extrair informação pertinente e relevante de um conjunto de materiais, nomeadamente, a partir da identificação sistemática e objetiva de características específicas do material em estudo (Smith, 2000). Quivy & Campenhoudt (1998) referem que, este método de análise de conteúdo solicita processos técnicos exatos (apenas a construção e a utilização de métodos sólidos é que conduzem o investigador a uma interpretação que não contenha apenas os seus valores e representações). Carmo & Ferreira (1998) afirmam que a análise de conteúdo é uma técnica investigativa que permite fazer uma descrição objetiva, sistemática do conteúdo manifestado nas comunicações, tendo por objetivo a sua interpretação.

O material usado pode incluir, entre outros, documentos de imprensa, entrevistas e questionários de resposta aberta. Denzin & Lincoln (1994) referem que esta técnica tem como objetivo isolar, organizar e interpretar temas, questões e motivos recorrentes no material em estudo. Esse processo chama-se de codificação e através dele, consegue-se que um volume inportante de informação qualitativa possa ser reduzido a um conjunto mais pequeno e mais facilmente manuseável (Smith, 2000).

A técnica da análise de conteúdo baseia-se, deste modo, num sistema de codificação que, segundo Bardin (2008) abrange os seguinte aspetos:

- a definição das unidades mínimas de análise do material em estudo (designadas por unidades de registo), as quais são uma opção do investigador e podem ser uma palavra, uma fase, um parágrafo, um texto, a resposta aberta a um questionário, entre outros.
- a definição das unidades de contexto, as quais permitem confirmar o significado que o autor pretendeu dar a cada uma das suas afirmações.
- a definição das unidades de enumeração.

Além do sistema de codificação, é necessário proceder à categorização e são as categorias ou as dimensões que vão atribuir um significado específico às partes de texto que constituem as unidades de análise. A criação de categorias deve obedecer a um conjunto de regras – as categorias devem ser unidimensionais, exaustivas, mutuamente exclusivas e independentes. Para além disso, é necessário que as categorias sejam definidas de forma explicita e detalhadamente, de modo a permitir o mesmo entendimento por diferentes codificadores (*ibidem*).

O tipo de análise de conteúdo pode ser quantitativa ou qualitativa. Carmo & Ferreira (1998, p. 253) referem que *a principal distinção entre as duas é que na análise quantitativa, o que é mais importante e´ o que aparece com frequência, sendo o número de vezes o critério utilizado, enquanto numa análise qualitativa a noção implica a novidade, o interesse, o valor de uma tema*.

Em particular, a análise de dados provenientes de um estudo de natureza qualitativa é um processo de investigação que envolve organização, redução, apresentação e interpretação dos dados para alcançar a descrição ou explanação de um fenómeno. Com efeito, sendo os dados recolhidos, em tais metodologias, na sua grande maioria, resultantes de formas de comunicação verbal (escrita ou oral), torna-se essencial o recurso ao desenvolvimento de um sistema de categorias visando a sua redução e classificação, permitindo a identificação de unidades que os encaixem em especificidades representadas por uma categoria de codificação. Deverão ser organizados de modo a que o investigador *seja capaz de ler e recuperar os dados à medida que se apercebe do seu potencial de informação e do que pretende escrever* (Bogdan & Biklen, 1994, p. 232). Os mesmos autores recomendam, após a criação de categorias preliminares, a atribuição de abreviaturas identificadoras às unidades de dados, definindo-as como, geralmente, *partes das notas de campo,* *transcrições ou documentos que caem dentro de um tópico particular da categoria de codificação* (Bogdan & Biklen, 1994, p. 233), podendo assumir a forma de parágrafos, frases ou sequência de parágrafos.

Tuckman (2000) refere que a codificação de resposta pode ser definidas previamente à recolha de dados (pré-codificação) ou após essa recolha (pós-codificação), podendo ser utilizados os mesmos processos de codificação, em qualquer dos casos. Na pré-codificação (codificação ser feita antes da recolha de dados), o investigador já possui as categorias definidas e vai colocando as respostas dadas na categoria que mais se adequa, transformando assim a resposta numa listagem nominal e não numa resposta livre. No caso da pós-codificação, terá que haver sempre um registo textual das respostas. Em ambos os casos, deverão ficar registadas as respostas, em qualquer tipo de formato, para poderem ser analisadas por outros investigadores e desta forma minimizar os problemas de fidelidade dos processos de apreciação de codificação. Muitas classificações emergem de atitudes, frases e ações manifestadas pelos sujeitos durante a ação, com as quais o investigador considera poder realizar os propósitos da investigação, sendo, por isso, frequente, à medida que o trabalho se desenvolve, proceder à reformulação das categorias definidas à priori.

Neste estudo, a análise de conteúdo seguiu as seguintes etapas: 1) organização da análise; 2) exploração do material e 3) análise dos resultados (Bogdan & Biklen, 1994; Carmo & Ferreira, 1998). A nível metodológico, seguiu-se um procedimento de categorização e as unidades de análise foram construídas com base na adaptação da estrutura básica de análise de Cohen, Manion & Morrison (2007) tal como se apresenta a figura 3.3:

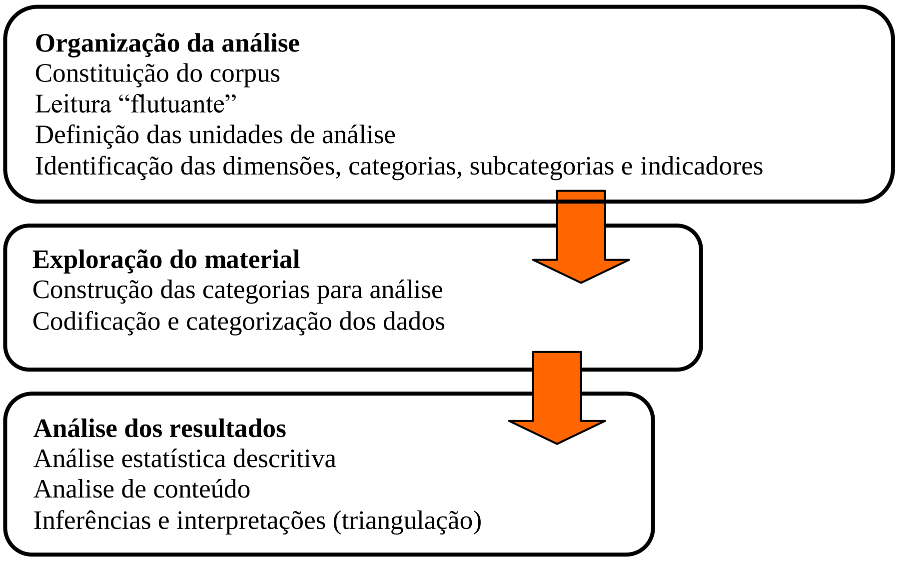


Figura 3.3: Procedimento de análise de conteúdo, adoptado de Cohen, Manion & Morrison (2007)

Wolcott referido em Vale (2004) afirma existir três momentos fulcrais durante a fase de análise de dados: descrição, análise e interpretação, sendo que a descrição corresponde à escrita de textos que resulta dos dados originais registados pelo investigador, a análise consiste num processo de organização de dados, onde se deve evidenciar os aspetos essenciais e indispensável e identificar fatores chave e, por fim, a interpretação diz respeito ao processo de obtenção de significados e ilações a partir dos dados obtidos. Estes mesmos autores propõem um modelo de análise a usar na investigação qualitativa que consiste em três momentos: a redução dos dados, a apresentação dos dados e as conclusões e, por fim, a verificação. A redução dos dados diz respeito ao processo de escolher, simplificar, facilitar e organizar a totalidade dos dados obtidos, durante a investigação. A apresentação dos dados diz respeito ao momento em que a informação é organizada e condensada para que assim, o investigador possa ver de forma rápida e eficaz o que se passa no estudo. A verificação diz respeito à extração de conclusões da informação recolhida, organizada e compactada.

No presente estudo, na análise dos dados propriamente dita, a investigadora-docente releu mais do que uma vez todos os documentos obtidos- as notas de campo produzidas por si e de todos os documentos produzidos pelos alunos - para alcançar uma visão completa e ampla sobre o assunto. O material que foi sendo recolhido ao longo da investigação (notas de campo, questionários, respostas a fichas de trabalho, respostas a dois desafios, produções escritas de alguns alunos e dois testes de avaliação - formativo e sumativo) foi organizado num “dossier” que foi submetido a uma análise pormenorizada e indutiva e transcrito para formato digital (Microsoft Word). No começo do estudo, a docente-investigadora iniciou por analisar o conteúdo dos questionários de caraterização dos alunos, com o objetivo de caraterizar melhor a turma (o aluno e o seu agregado familiar). Posteriormente, elaborou um resumo das notas de campo, tentando estruturar de forma coerente as atitudes e reações dos alunos, bem como as principais dificuldades levantadas e sentidas pelos alunos. Também foram analisados os resultados dos outros dois inquéritos (questionário final e o questionário aplicado aos seis alunos) e os documentos reunidos (testes de avaliação dos conhecimentos, respostas aos dois desafios lançados pela docente, respostas da ficha de trabalho dado pela docente, produção escrita de alguns alunos e notas de campo). Por fim, a docente - investigadora observou toda a informação compactada, elaborou quadros síntese da informação que foram comentados estabelecendo, assim, conclusões fundamentadas em forma de narrativa que pretende ser compreensível e esclarecedora para o leitor.

Tendo por base estes aspetos, foi adoptada, neste estudo, uma técnica de categorização analítica, partindo de um conjunto de categorias preliminares determinado pelo objeto do estudo, consertando-o à medida que emergiam indicadores de referência importantes para a obtenção de significados e ilações suscetíveis de conduzir a uma interpretação. Essa primeira tentativa de atribuição de categorias de codificação, de acordo com Bogdan & Biklen (1994, p. 233), contribui, na realidade, para uma validação das categorias criadas.

A análise dos dados esteve sempre relacionada com as questões levantadas e estabelecidas no início do estudo. Essas questões, bem como as técnicas e instrumentos utilizados na recolha dos dados encontram-se sintetizadas na tabela 3.1.

Questão orientadora da investigação	**Técnicas e Instrumentos de recolha dos dados**
- Em que medida o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem em que se exploram aspetos socioculturais da matemática, com recurso à geometria *sona*, contribui para a aprendizagem das isometrias, ao nível de conhecimentos, capacidades e ao nível atitudinal e afetivo?	- **Observação participante** - com registo em notas de campo - **Inquirição** – sob a forma de questionário individual. - **Análise documenta**l: todos os documentos produzidos pelos alunos– nomeadamente registos dos alunos nas fichas de trabalho e nos testes de avaliação diagnostica, formativo sumativo.

Tabela 3.1: Síntese das questões do estudo e os instrumentos utilizados

Para analisar o desempenho dos alunos na resolução das tarefas que lhes foram propostas (durante e após a exploração das atividades geométricas, inspiradas na cultura africana, com recurso à etnomatemática), valorizamos três dimensões da aprendizagem matemática, no sentido que é preconizado no Programa de Matemática (Ponte *et al*., 2007): conhecimento matemático (conceptual e procedimental), capacidades transversais e atitudes.

Tendo em conta que a intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção, inferência e que esta recorre a indicadores (Bardin, 1995, p. 38), estabelecemos um sistema categorial capaz de responder à questão de investigação que remete para a necessidade de compreender em que medida o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem em que se exploram aspetos socioculturais da matemática, com recurso à geometria *Sona*, se repercute na aprendizagem das isometrias de alunos do 9.º ano do 3.º CEB. Nesse sentido, definiram-se duas categorias para a codificação e posterior análise dos dados:

- Desempenho matemático.

- Desempenho afetivo e atitudinal.

A primeira destas categorias implica a definição de duas dimensões de análise: compreensão de diferentes transformações geométricas (isometrias) e suas propriedades e reconhecimento e aplicação das isometrias em contextos diversificados.

A categoria que denominámos de desempenho afetivo e atitudinal engloba aspetos afetivos da aprendizagem, pois sabemos que esta componente influencia a forma como o aluno aprende e, como tal, organiza-se em torno das atitudes e comportamento face à realização de atividades matemáticas. Dentro desta categoria, definimos as seguintes dimensões de análise:

- Motivação na realização das atividades propostas e curiosidade por indagar e explorar regularidades presentes em contextos diversificados;

- Apreciação da presença de ideias matemáticas em artefactos culturais e das qualidades estéticas dos desenhos *Sona*.

De igual modo sentiu-se a necessidade de codificar alguns dados obtidos. Na tabela 3.2 podemos observar a designação dos códigos que foram atribuidos aos dados recolhidos e tratados.

Código	Designação
D1, D2, D3,..., D27	Desenhos
A1, A2, A3,...,A27	Alunos
DF 1, DF2, DF3, ..., DF27	Desafio final
NC1, NC2, NC3,...,NC27	Notas de campo das sete sessões

Tabela 3.2: Designação dos códigos atribuidos aos dados recolhidos e tratados

3.6 Técnicas e instrumentos de recolha dos dados

Numa investigação é necessário pensar nas formas de recolha da informação que a investigação vai proporcionando. Na situação em que docente é simultaneamente investigadora, esta precisa de ir recolhendo informação sobre a sua própria ação ou intervenção, com o intuito de ver com mais distância os efeitos da sua própria prática letiva. Assim, existe um conjunto de técnicas e de instrumentos de recolha de dados que Latorre (2003) divide em 3 categorias, que apresentamos na tabela 3.3.

Técnicas e instrumentos de recolha de dados		
Técnicas		**Instrumentos de recolha de dados**
Observação	O investigador observa em direto e presencialmente o fenómeno em estudo	Notas de campo Diário de bordo Registos fotográficos Registos audiovisuais
Inquirição	Enquadram-se nos ambientes de diálogo e de interação entre participantes e investigador	Entrevista Inquérito
Análise de documentos	Implica uma pesquisa e leitura de documentos escritos, produzidos ou não pelos participantes.	Documentos escritos produzidos pelos participantes Documentos oficiais Testes

Tabela 3.3: Técnicas e instrumentos de recolha de dados (fonte: Latorre, 2003)

Neste estudo, a recolha de dados foi feita exclusivamente pela investigadora e em contexto escolar, baseando-se fundamentalmente: observação participante e direta - na sala de aula - apoiada por registo em notas de campo; inquérito por questionário - através de três questionários e conversas diretas com os alunos e análise documental - registos escritos dos alunos (atividades realizadas pelos alunos, teste diagnóstico, teste de avaliação formativo e teste de avaliação sumativo). Refira-se que se optou por não usar gravações de áudio e de voz, pois como refere Merriam (1988), estávamos conscientes da possibilidade do seu carácter obstrutivo.

Observação direta e participante

Tuckman (2000, p. 523) afirma que, na investigação qualitativa, a observação tem o *objetivo de examinar o ambiente através de um esquema geral para nos orientar e que o produto dessa observação é registado em notas de campo*. No que concerne à importância da observação como método de recolha de dados, Vale (2000, p. 233) refere que *a observação é a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em actividade, em primeira-mão, pois permite comparar aquilo que diz, ou que não diz, com aquilo que faz*. De entre as estratégias de observação encontramos a observação participante que se carateriza por o observador se inserir e participar na atividade do grupo a observar, o que favorece uma maior compreensão dos acontecimentos e do modo como são vividos e percebidos pelos participantes (Goetz & LeCompte, 1984). Acresce ainda salientar que a observação permite evidências de dados que não seriam acessíveis por outro processo (Lakatos & Marconi, 1990). Yin (1994) refere que a observação participante é um modo especial de observação, no qual o investigador não é meramente um observador passivo, mas alguém que desempenha algum papel na situação que está a ser estudada ou que participa em atividades relacionadas com ela. De acordo com Patton (1990), a observação constituiu um procedimento de recolha de dados que apresenta várias vantagens: permite ao observador compreender o contexto no qual decorre o fenomeno em estudo - permite ir além das percepções seletivas dos sujeitos e ganhar informação que outro modo não estavam disponível ou oculta e, por fim, permite ainda aceder ao significado que os sujeitos atribuem às experiências por eles vividas, no caso da observação participante.

A metodologia do estudo e o facto de a investigadora ser também professora da turma, favoreceu um forte envolvimento em todo o processo de investigação. Como tal, tivemos uma participação ativa que nos permitiu observar e registar, sob a forma de notas de campo, os dados que nos pareceram relevantes para o estudo (comentários, ações, comportamentos, atitudes, etc. dos alunos). Contudo, a investigadora, teve sempre presente as recomendações de Tuckman (2000), tendo observado, de forma atenta os sujeitos no sentido de apreender tanto quanto possível o que se estava a passar, sem influenciar o decorrer normal dos acontecimentos. Para o autor referido, a observação pode significar, algumas vezes, uma tentativa de confirmação ou não das várias interpretações que surgiram das entrevistas ou dos relatórios e, como tal, o investigador deve estar sensível e atento a essa possibilidade. Ainda de acordo com Tuckman, o investigador que usa como estratégia de recolha de dados a observação deve ter a preocupação de registar o produto dessa observação por escrito. Para que o registo tenha validade e não seja enviesado por outros acontecimentos deve ser feito o mais próximo possível dos factos reportados (*ibidem*).

Notas de campo

Notas de campo são registos recolhidos durante uma observação, representando um importante instrumento de recolha de dados para uma investigação de cariz qualitativo. Para que as anotações estejam de acordo com os objetivos da investigação é necessário haver um planeamento prévio do que deve ser anotado e observado, delimitando claramente o foco da investigação para não se desviar da proposta inicial da pesquisa. Estrela (1984) refere que as notas de campo, como relatos escritos do que o investigador ouve, vê e experimenta durante a investigação, indicam o que se pensa no decurso da recolha e refletem sobre os dados recolhidos no estudo. Além disso, as notas de campo têm subjacente uma maior preocupação em captar o que se observa, pelo que exigem um esforço maior, por parte do investigador, em registar, de forma objetiva, os detalhes presenciados (Bogdan & Biklen, 1994). De acordo com o mesmo autor, as notas de campo transmitem, igualmente, as ideias do investigador, onde, por vezes, existe alguma ênfase quanto aos sentimentos, problemas e sensações. As notas de campo podem ser apenas apontamentos que servirão para enquadrar a recolha e posterior interpretação dos dados, ou podem ser extensivos e dar conta de todas as vivências no decurso da investigação (Bogdan & Biklen, 1994). Neste último caso, as notas de campo tomam a forma de um diário, sendo possível inseri-las na grande categoria dos documentos pessoais.

Bogdan & Biklen (1994) apresentam várias sugestões sobre o que deve ser incluído nas notas de campo, salientando que o conteúdo das mesmas deve conter uma parte descritiva e uma reflexiva. Destacamos na tabela 3.4. a componente descritiva das observações e na tabela 3.5 sintetizamos a componente reflexiva, sendo que esta última inclui as observações pessoais do pesquisador, feitas durante a fase de recolha: as suas especulações, sentimentos, problemas, ideias, impressões, dúvidas, incertezas, surpresas e decepções.

Parte descritiva dos conteúdos das observações (Bogdan & Biklen, 1994)	
Descrição dos sujeitos	A sua aparência física, os seus maneirismos, o seu modo de vestir, de falar de agir.
Reconstrução de diálogos	As palavras, os gestos, os depoimentos, as observações entre sujeitos ou entre estes e o pesquisador. Tanto quanto possível devem utilizar as suas próprias palavras. As citações são extremamente úteis para analisar, interpretar e apresentar dados.
Descrição dos locais	O ambiente onde é feita a observação deve ser descrito. O uso de desenhos ilustrando a disposição dos móveis, o espaço físico, a apresentação do quadro de giz, dos cartazes dos materiais de classe podem também ser elementos importantes a ser registados.
Descrição de eventos especiais	As anotações devem incluir o que ocorreu, quem estava envolvido e como se deu esse envolvimento.
Descrição das atitudes	Devem ser descritas as atividades gerais e os comportamentos das pessoas observadas, sem deixar de registar a sequência em que ambos ocorrem.
Os comportamentos do observador	Sendo o principal instrumento da pesquisa, é importante que o observador inclua nas suas anotações as suas atitudes, ações e conversas com os participantes durante o estudo.

Tabela 3.4: Parte descritiva dos conteúdos das observações (fonte: Bogdan & Biklen, 1994)

Parte reflexiva dos conteúdos das observações (Bogdan & Biklen, 1994)	
As reflexões podem ser:	
Analíticas	Referem-se ao que está sendo aprendido no estudo, novas ideias surgidas.
Metodológicas	Envolve os procedimentos e estratégias metodológicas utilizadas, problemas encontrados na obtenção dos dados e a forma de resolvê-los.

Mudança na perspetiva do observador	Deve ser anotada as expetativas, opiniões, preconceitos do observador e a sua evolução durante o estudo.
Esclarecimentos necessários	As anotações devem conter pontos a serem esclarecidos, aspetos que parecem confusos, relações a serem explicitadas, elementos que necessitam de maior exploração.

Tabela 3.5: Parte reflexiva dos conteúdos das observações (fonte: Bogdan & Biklen, 1994)

Vários dos autores consultados e já referidos apontam um conjunto de recomendações e cuidados a ter com a tomada de notas de campo:

- Deve-se fazer as anotações o mais próximo possível do momento da observação, o que vai depender do papel do observador e das suas relações com o grupo a ser observado. Se o observador não revelar a sua condição ao grupo não poderá fazer as suas anotações no local, e se for observador participante fica inviável fazer anotações durante a observação, pois comprometerá a interação com o grupo. Assim, o investigador deverá encontrar o mais breve possível, uma ocasião para que possa completar as suas notas.
- A forma de registar os dados vai depender da situação específica do observador. Pode ser pertinente, por exemplo, que ao iniciar o registo das notas de campo, o investigador indique o dia, a hora, o local da observação e o seu período de duração, como também deixar uma margem para codificação do material e observações gerais. Também é necessário que organize os dados, deixando bem distinto, em termos visuais, as informações descritas, as falas, as citações e as observações pessoais, mudando de parágrafo a cada nova situação observada.
- Quanto ao tipo de material para fazer as anotações, vai depender do estilo pessoal do observador. Alguns preferem um papel pequeno para não chamar atenção, outros usam folhas avulsas, outros preferem usar material que mantenha junto todo o conjunto de observações para possível consulta a informações obtidas anteriormente.

Neste estudo, as notas tomadas pela docente-investigadora foram usadas, essencialmente, para obter informações individualizadas, no final de algumas sessões, e para ajudar na decisão de introduzir eventuais alterações ao plano. Na parte final da investigação, este instrumento foi importante dado que, os dados recolhidos em notas de campo podem ser úteis no momento da avaliação dos resultados para interpretar dados recolhidos por intermédio de uma observação sistemática (com uma grelha) ou com a ajuda de um inquérito (oral ou questionário escrito).

Inquérito por questionário

Na investigação qualitativa a inquirição pode ser utilizada em paralelo com a observação ou com outras técnicas (Bogdan & Biklen, 1994). O *inquérito é uma maneira indireta de recolher dados sobre a realidade* (Lessard-Lébert, 1996, p. 100), que permite obter informações essenciais ou avaliar o efeito de uma intervenção quando não é possível fazê-lo de outra maneira. Questionar os indivíduos, de forma oral ou por escrito, tem a finalidade de tentar obter respostas que exprimem percepções ou opiniões sobre acontecimentos, sobre outras pessoas ou sobre si próprio ou que permitam, por inferência, supor que os indivíduos tem capacidades, comportamentos ou processos que não se poderiam observar ao vivo (*ibidem*).

Na investigação educacional, o processo de elaboração e aplicação de um questionário passa por um conjunto de fases e deve de respeitar um conjunto complexo de procedimentos. A aplicação de um questionário é classificada como uma técnica em que existe uma interação indireta com quem responde, sendo necessário ter muito cuidado na sua elaboração. Assim, as perguntas devem ser: claras (devem ser compreendidas do mesmo modo por todos os inquiridos); curtas; limitadas a um só problema; diretas (evitar fazer perguntas pela negativa); simples (evitar perguntas duplas); para além dos aspetos referidos, acrescenta-se a necessidade de os inquéritos possuírem instruções claras para quem tem que responder sentir que compreendeu, evitando-se a ambiguidade, ou seja, devem também contemplar questões que não sugiram interpretações que levem ao erro na resposta. Os inquéritos por questionário devem, ainda, contemplar uma introdução, se, em especial, não forem distribuídos por quem os elaborou. Nesta introdução, devem estar bastante claro os propósitos do questionário e explicitando o tratamento que será dado aos dados recolhidos. Finalmente, deve-se garantir a total confidencialidade dos dados que o inquirido colocou no preenchimento do questionário (Bogdan & Biklen, 1994).

Para Carmo & Ferreira (1998, p. 137), duas questões devem ser tidas em consideração aquando da elaboração dos questionários: *o cuidado a ser posto na formulação das perguntas e a forma mediatizada de contactar com os inquiridos*. Normalmente, os questionários integram vários tipos de perguntas de identificação, de informação, de descanso e de controlo. Outro aspeto também importante é a decisão a tomar relativamente à ordenação dos itens do questionário, pois as primeiras questões podem condicionar as respostas seguintes.

Nesta investigação fizemos uso de três questionários. O primeiro, aplicado no início do ano letivo a todos os alunos da turma, visou, no geral, a caraterização dos alunos através da sua identificação, do encarregado de educação e do agregado familiar. Este questionário foi utilizado e analisado durante a elaboração do projeto curricular da turma.

O inquérito por questionário aplicado no final do estudo, a 23 dos 24 alunos da turma, era constituído por 9 questões de natureza predominantemente fechada (anexo 11). Este questionário visava recolher a sua opinião sobre a sequencia didática implementada. As perguntas foram agrupadas em duas partes: a Parte I “Identificação do aluno” incidindo sobre dados relativos ao aluno e aos seus pais (nome, idade, turma, naturalidade, naturalidade do pai e naturalidade da mãe) bem como à sua relação com a matemática (se gostava de Matemática, se considerava a Matemática uma disciplina difícil e se via utilidade na mesma); na Parte II “Apreciação das atividades envolvendo desenhos *sona*” pretendeu-se recolher a opinião dos alunos sobre a sequência didática e, muito em particular, sobre as atividades envolvendo desenhos *sona* e o seu contributo para a apreciação da Matemática, a motivação para a realização das tarefas matemáticas e para o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática Mais especificamente pretendeu-se avaliar o conhecimento dos desenhos *sona* e do povo que a pratica, identificar as dificuldades na realização das atividades, perceber se tornaram as aulas mais atrativas, se tornaram a matéria mais interessante, se facilitaram ou não a aprendizagem, se ajudaram a perceber a matéria e o tema em estudo, se facilitaram a participação dos alunos na aula, se permitiram percepcionar a presença da matemática nas atividades culturais, e se as atividades motivaram para a aprendizagem da Matemática.

No terceiro questionário, constituído por seis perguntas de natureza aberta, pretendia-se avaliar o impacto desta sequência didática nos alunos, de forma mais aprofundada, ao nível dos conhecimentos matemáticos, da motivação para a realização de tarefas matemáticas e da apreciação da matemática, entre outros aspetos importantes para poder responder às questões de investigação. O questionário foi aplicado no final da sequência didática a um número limitado de alunos. Procurou-se escolher alunos com diferentes níveis de aproveitamento à disciplina de matemática (foram selecionados alunos de nível 2 a 5), com diferentes opinião sobre esta (apreciação positiva desta ciência e outros com atitudes depreciativas) e por fim de várias nacionalidades. Tinha como objetivo esclarecer eventuais dúvidas sentidas pela docente, depois da análise do questionário preenchido por todos os alunos da turma. As questões colocadas centravam-se nas atividades que envolveram os desenhos *sona* e questionava-se se os tinha incentivado a efetuar as tarefas propostas pela docente e justificando; se este tipo de atividades melhorou a opinião sobre a matemática e porquê; se este tipo de atividades contribuiu para ver o lado humano da matemática e porquê; se este tipo de atividade ajudou a ver que a Matemática está presente na arte e na cultura dos povos e porquê; se estas atividades ajudaram a identificar isometrias e simetrias no dia a dia (na arte, na natureza, na arquitetura, etc.) e pedia-se para dar exemplos em que isso tenha sucedido, caso se a resposta fosse afirmativa) e finalmente pedia-se sugestões (anexo 21).

Análise documental

Segundo Carmo & Ferreira (1998), a análise documental tem o intuito de selecionar, tratar e interpretar a informação bruta que existe em suportes estáveis, com o intuito de extrair algum sentido e obter dados relevantes para responder às questões de investigação A pesquisa e a análise documental não tem como objetivo suscitar dados novos, mas incidir sobre documentos existentes, os quais não foram elaborados de acordo com os objetivos do estudo. Saint-Georges (1997) afirma que a primeira etapa de um processo de análise documental consiste em selecionar as fontes de informação para constituir um *corpus* pertinente para o estudo em causa. Este mesmo autor (*ibidem*, p. 30) considera a pesquisa documental *como um método de recolha e de verificação da* *dados: visa o acesso às fontes pertinentes, escritas ou não, e, a esse título, faz parte integrante de heurística da investigação*. Assim, a pesquisa ou consulta documental pode ser utilizada como método de investigação em si próprio (e nesse caso, os documentos são a principal fonte de informação para o estudo) ou como uma forma de complementar informação recolhida por outras técnicas. Quivy & Campenhoudt (1998, p. 201) afirmam que o investigador recolhe documentos por duas razões: *ou tenciona estudá-los por si próprios (...) ou espera encontrar neles informaçõess úteis para estudar outro objecto (...)*. Nesta investigação, a análise documental assentou, essencialmente, em todos os produtos escritos dos alunos que resultaram da resolução das tarefas propostas pela docente-investigadora.

Registos escritos dos alunos

De acordo com vários autores, a recolha de registos do trabalho dos sujeitos de investigação no estudo é uma técnica que permite averiguar possíveis contradições, corroborar e complementar informações adquiridas por outros técnicas (e.g. Bogdan & Biklen (1994, p. 176)). Tais registos podem incluir evidências do trabalho e do desempenho dos alunos, seja nas atividades desenvolvidas em sala de aula quer nas desenvolvidas em casa, sob proposta do professor.

Neste presente estudo, consideramos como registos escritos as fichas de registo das atividades realizadas em sala de aula, o teste diagnóstico, as respostas a dois desafios e os dois testes de avaliação dos conhecimentos (formativo e sumativo). Relativamente às fichas de registo das atividades realizadas em aula, deve referir-se que, no decorrer da aula, a docente-investigadora acompanhou o trabalho dos alunos, reorientando-o sempre que necessário. Como tal, a sua análise carece de cruzamento com os dados provenientes de notas de campo, onde foram feitas observações e reflexões suscitadas pela atividade dos alunos em aula, nomeadamente em termos das principais dificuldades sentidas, o desempenho, o interesse e a motivação na realização das tarefas propostas.

No corpo do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*. 2007, pp. 11-12), pode ler-se:

> *É através da avaliação que o professor recolhe a informação que lhe permite apreciar o progresso dos alunos na disciplina e, em particular, necessidade (ou não) de alterar a sua planificação e acção didáctica. A avaliação deve, por isso, fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino-aprendizagem. (...) A avaliação deve, por isso, fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino-aprendizagem. Neste contexto, é necessária uma avaliação continuada posta ao serviço da gestão curricular de carácter formativo e regulador. Com este entendimento, a avaliação é um instrumento que faz o balanço entre o estado real das aprendizagens do aluno e aquilo que era esperado, ajudando o professor a tomar decisões ao nível da gestão do programa, sempre na perspectiva de uma melhoria da aprendizagem.*

Como tal, neste trabalho é dado relevo aos registos escritos que provêm de formas de avaliação formal, tais como o teste diagnóstico, o teste formativo e o teste sumativo aplicados aos alunos.

3.7 Tratamento e apresentação dos dados

Este ponto prende-se com o tratamento e apresentação dos dados obtidos através de diversas técnicas, sustentadas por diferentes instrumentos escolhidos para o desenvolvimento da investigação. No que diz respeito aos dados recolhidos através de questionários e de documentos escritos, tais como testes de avaliação diagnóstica, formativa e sumativa, optámos por fazer, previamente à sua análise qualitativa e interpretativa, uma análise descritiva sob a forma de tabelas de frequências e representações gráficas, em que recorremos ao auxílio de duas ferramentas informáticas, a uma folha de cálculo Excel e o programa SPSS. Outros documentos escritos produzidos pelos alunos foram, considerados como substanciais, tendo sido tratados neste estudo, segundo uma metodologia de análise de conteúdo. Para tal, a apresentação dos dados foi feita seguindo o sistema de categorias acima apresentado, sem que no entanto, se tenha perdido de vista o todo recolhido.

3.8 Triangulação e Validação

Na investigação qualitativa, a fase correspondente à análise e interpretação dos dados recolhidos exige do investigador o respeito por determinados procedimentos analíticos que assegurem que as percepções, as observações, os relatos e leituras das situações se enquadram dentro de alguns limites de correspondência (Denzin & Lincoln, 2000). Impõe-se assim o recurso a critérios de validade externa e interna. Nesse sentido, há que atender à necessidade de efetuar a descrição detalhada de todo o processo em que o investigador esteve envolvido, sob os pontos de vista: relacional; participativo; de contexto físico e social; fontes de informação; métodos de recolha e análise de dados e pressupostos teóricos.

Ainda no que concerne à validade, a triangulação metodológica surge como uma das estratégias mais utilizadas na investigação educativa. A triangulação metodológica refere-se a uma combinação de várias práticas metodológicas, materiais empíricos, perspetivas e observadores e, neste caso, realiza-se entre diferentes métodos de recolha de dados sobre o mesmo objeto de estudo (Pérez Serrano, 2000).

Na triangulação metodológica, Denzin & Lincoln (1994) afirmavam que face às "fraquezas" e às "virtudes" de cada método, a "triangulação" consistia num complexo processo de colocar cada método em confronto com outro para maximizar a sua validade (interna e externa), tendo como referência o mesmo problema de investigação. Assim, o principal objetivo da integração de métodos seria a convergência de resultados de investigação, que seriam válidos caso conduzissem às mesmas conclusões e, opostamente, os dados contraditórios entre si eram interpretados como sinal de invalidade ou refutação. Segundo Coutinho (2007), nos estudos qualitativos, as conclusões devem ser expressas em forma de discurso narrativo, descritivo e não de um ponto de vista demasiado científico. Estas deverão dar uma perspetiva holística e ser também o momento da descrição das experiências do investigador e dos seus significados. Para tal, o investigador deverá ser sempre honesto na apresentação das suas conclusões pois caso não o seja, o estudo não terá valor científico e não atingirá nenhum dos seus objetivos (*ibidem*).

3.9 A sequência didática

Neste ponto e com o objetivo de dar uma ideia global do trabalho desenvolvido em sala de aula, procede-se à descrição da sequência didática planificada e implementada pela investigadora. De acordo com Campos *et al*. (2011, p. 3):

> *Uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas de maneira sistemática, em torno de um determinado campo conceitual. Ela serve para dar acesso aos alunos a práticas de resolução de questões matemáticas que criem no aluno desafios para ele resolver e lidar, enfim gerando, necessidade de responder aos conflitos cognitivos para melhor interagir com o ambiente no âmbito dos saberes novos ou que apresentem dificuldades de apropriação.*

Neste ponto, pelo relevo que os conceitos de tarefa e atividade assumem na didática da matemática (Ponte & Serrazina, 2000) interessa distinguir as duas noções. De acordo com Ponte (2005, p. 11) *quando se está envolvido numa actividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objectivo da actividade*. Este mesmo autor refere que apesar de uma tarefa ser normalmente formulada e proposta pelo professor aos alunos, haverá situações em que a iniciativa é tomada pelo aluno ou pelo aluno e professor. Em qualquer dos casos, uma tarefa carece sempre de interpretação pelo sujeito. Como tal, *pode dar origem a actividades muito diversas – ou nenhuma actividade – conforme a disposição deste e o ambiente de aprendizagem de sala de aula* (Ponte & Serrazina, 2000, p. 112):

> *Uma tarefa, embora seja na maior parte dos casos proposta pelo professor, tem de ser interpretada pelo aluno (...) uma tarefa pode remeter para diversas estruturas ou conceitos matemáticos (...) A percepção dos aspetos matemáticos da tarefa feita pelo aluno depende da sua interpretação da tarefa e nessa interpretação intervêm sempre factores de natureza cultural, sociológica e psicológica (ibidem, p. 112).*

De acordo com Godino (2004, p. 79) *Una responsabilidad central del profesor consiste en seleccionar y desarrollar tareas valiosas y materiales que creen oportunidades para que los estudiantes desarrollen su comprensión matemática, competencias, intereses y disposiciones*. Ou seja, são as tarefas e os materiais com que os alunos trabalham que demarcam e focam a oportunidade dos alunos aprenderem matemática na escola (*ibidem)*. A este propósito, Ponte (2005) afirma *é formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade dos alunos*. De facto, é *a actividade realizada pelo aluno que constitui a base da sua aprendizagem* (Ponte & Serrazina, 2000, p. 112). Se é verdade que é *formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a actividade do aluno, não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter* *atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização em sala de aula* (Ponte, 2005, p. 11-12).

Godino (2004, p. 79) sublinha que importa diversificar a natureza das tarefas a propor aos alunos tendo sempre em mente que são estas que:

> *- Proporcionan el estímulo para que los estudiantes piensen sobre conceptos y procedimientos particulares, sus conexiones con otras ideas matemáticas, y sus aplicaciones a contextos del mundo real.*
> *- Pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas en el contexto de su utilidad.*
> *- Expresan lo que son las matemáticas y lo que implica la actividad matemática.*
> *- Pueden dar una visión de las matemáticas como un dominio de indagación valioso y atrayente.*
> *- Requieren que los estudiantes razonen y comuniquen matemáticamente y promueven su capacidad para resolver problemas y para hacer conexiones.*

Importa ter presente que as tarefas matemáticas podem ser de natureza diversificada, abrangendo desde questões rotineiras a outras de natureza menos rotineira, tais como os problemas, os jogos ou as investigações (Ponte, 2005; Ponte & Serrazina, 2000). Se as primeiras podem ter um papel importante para a consolidação de conhecimentos e destrezas, não proporcionam *condições para um desenvolvimento cognitivo no qual: novo conhecimento subjectivo é construído pelo aluno; itens de conhecimento adquirido anteriormente são reconhecidos e avaliados pelo aluno e são reorganizados num corpo de conhecimento mais alargado* (Ponte & Serrazina, 2000, p. 114). Deste modo, Ponte (2005) destaca como dimensões fundamentais de uma tarefa o seu grau de desfio - que remete para a dificuldade da questão - e o seu grau de estrutura – que diz respeito à natureza mais aberta ou fechada da tarefa.

Tendo presentes estas recomendações, que realçam a importância dos professores diversificarem as tarefas e adaptarem a sua forma de avaliação às metodologias adotadas, procurou-se propor aos alunos tarefas diversificadas e uma avaliação consonante com os objetivos de aprendizagem prosseguidos e o trabalho desenvolvido em sala de aula. Por outro lado, na conceção da sequência didática esteve subjacente a preocupação de articular as orientações curriculares do Programa de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico (em vigor na Escola no ano letivo 2011/12 em que o estudo foi desenvolvido) e do Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) Nesse sentido, com a finalidade de ensinar o tópico programático "Isometrias" desenvolvemos um conjunto de tarefas conectadas e articuladas entre si, através das quais pretendemos envolver os alunos na realização de atividades conducentes a aprendizagens matemáticas efetivas.

A sequência didática foi implementada em sete sessões, entre os meses de fevereiro e abril de 2012. A primeira sessão teve como intuito principal que os alunos se ambientassem à sequência didática e à geometria *Sona*, ao tipo de tarefas a desenvolver e aos seus objetivos. Nesta sessão foi realizado um teste diagnóstico incidindo sobre as transformações geométricas já trabalhadas pelos alunos: reflexão, translação, rotação e simetria axial. As restantes sessões tiveram o propósito de trabalhar os conceitos de isometria, de simetria axial e rotacional, todos eles integrados no tópico programático “Circunferência e Polígono. Rotações” do 9.º ano de escolaridade. As sessões, com a duração de 90 minutos cada, tiveram lugar, no horário normal da disciplina de matemática e decorrerem no período de tempo de 27 de fevereiro a 09 de abril de 2012, tendo de permeio a interrupção letiva da Páscoa, que decorreu 26 de março a 9 de abril. Nas várias sessões procurou-se envolver os alunos na realização de atividades diversificas de modo a proporcionar diferentes pontos de vista sobre os tópicos abordados e, consequentemente, enriquecer o processo ensino-aprendizagem. Todas as tarefas propostas foram elaboradas pela docente - investigadora, que teve em conta o nível etário dos destinatários, o seu desenvolvimento cognitivo, as suas características, os objetivos de aprendizagem pretendidos e a importância de introduzir inovação em termos de estratégia didática e da dinâmica de sala de aula.

Apresentamos, de seguida, uma breve descrição de cada sessão, as tarefas propostas e os objetivos de aprendizagem perseguidos.

- **Sessão 1** (fev. 2012)

Tarefas/ atividades: Teste de avaliação diagnóstica; Apresentação da sequência didática.

Objetivos: Avaliar os conhecimentos sobre as transformações geométricas (reflexão, translação e rotação); Preparar o estudo das isometrias; Contextualizar a sequência didática.

Descrição: Nesta sessão, pretendeu-se avaliar os conhecimentos dos alunos sobre as transformações geométricas já estudadas, considerados necessários à compreensão da noção de isometria. Além disso, visou-se preparar os alunos para a sequência didática, nomeadamente, por esta apresentar algumas novidades em termos de apresentação e de formato.

- **Sessão 2** (março 2012)

Tarefas/atividades: Projeção de um *Powerpoint* sobre “Geometria *Sona*”; Ficha de informação e motivação para os desenhos *sona*; Ficha de trabalho “Geometria *Sona*”.

Objetivos: Conhecer o povo *Cokwe,* a sua localização geográfica e a tradição de desenho na areia (*sona*); Conhecer a técnica usada na produção dos *sona* e as suas regras (introdução à geometria *Sona*); Traçar em papel ponteado alguns *sona;* Construir desenhos *sona* respeitando as regras de desenho do povo *Cokwe*; Rever as noções de sequência e de termo de uma sequência; Rever as noções de translação e de vetor associado a uma translação; Identificar, predizer e descrever uma isometria dada a figura geométrica e o transformado; Rever a noção de rotação, centro e amplitude do ângulo de rotação.

Descrição: Com recurso a um *Powerpoint*, pretende-se dar a conhecer aos alunos um povo africano, com pouca ou nenhuma escolaridade, em cujas tradições culturais se podem encontrar ideias matemáticas que se estudam no 9.º ano de escolaridade. Informar que, na sua tradição, a arte de desenhar na areia era ensinada pelos mais velhos aos jovens e que o desenho era feito à medida que contavam lendas, recordavam tempos passados, etc.. O desenho final é a imagem da história que vai sendo contada, o nome do desenho e título da história só é contado no final. Acrescentar que a mesma história pode ter desenhos diferentes.

A docente vai entregar uma folha de papel ponteado, aos alunos, contendo alguns desenhos *sona*, e explicar o processo seguido no seu traçado, ressaltando que as linhas podem cruzar-se mas nunca sobrepor-se. Em muitos casos, o desenho resulta do traçado de uma única linha e sem levantar o dedo. Informar que o desenho final é a imagem de uma história, lenda, adivinha, etc. que vai sendo contada. Só no final do desenho, são indicados o nome do desenho e título da história. A título ilustrativo, será contada aos alunos uma fábula (por exemplo, o galo e o chacal) e apresentado o respetivo *lusona*. De seguida, os alunos serão desafiados a percorrer esse *lusona* com a ajuda de um lápis, executando-o de uma só vez, isto é, sem levantar o lápis). Caso nem todos o consigam, a imagem será projetada no quadro e será pedido a um aluno que o faça, com a ajuda dos colegas e/ou da professora. De seguida, os alunos começarão a resolver as tarefas de uma ficha de tarefas denominada “Geometria *Sona* com o objetivo de desenvolver a sensibilidade para algoritmos geométricos, generalização, isometrias e simetria (axial e rotacional.

- **Sessão 3** (março 2012)

Tarefas/atividades: Projeção de um *Powerpoint* intitulado “Isometrias”; Ficha de trabalho “Translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante”; Ficha de trabalho “Geometria *Sona*”.

Objetivos: Reconhecer a presença das transformações geométricas estudadas em contextos sociais diversificados; Relembrar / Conhecer as noções de translação e vetor associado a uma translação; reflexão e eixo de reflexão; rotação, centro e amplitude de rotação; Conhecer e identificar a reflexão deslizante como uma transformação geométrica que resulta da composição de uma reflexão com uma translação cujo vetor é paralelo ao eixo de reflexão; Conhecer e compreender as noções de simetria axial e rotacional;Identificar as simetrias de uma figura (no plano).

Descrição: A aula iniciar-se-á com a visualização de um *powerpoint*, através do qual se pretende sensibilizar os alunos para a presença das transformações geométricas estudadas em contextos diversificados: natureza, artesanato, arquitetura, etc.. Paralelamente, a docente procurará ajudar os alunos a relembrar as noções de translação e vetor associado a uma translação; reflexão e eixo de reflexão; rotação, centro e amplitude de rotação. Será introduzida a noção de reflexão deslizante, sempre acompanhada com exemplos que a ilustrem. Será, de seguida, proposto aos alunos que respondam às questões apresentadas numa ficha de trabalho e que incidem sobre os conceitos trabalhados na aula. Por fim, será proposta aos alunos a continuação da resolução da ficha de atividades “Geometria *Sona*”, iniciada na 2.ª sessão:

- **Sessão 4** (março de 2012)

Tarefas /atividades: Ficha de apoio sobre isometrias e simetrias; Ficha de trabalho "Geometria *Sona*"; Sopa de letras "Isometrias e simetrias"; Palavras Cruzadas sobre "simetrias e isometrias"; Desafio "Tenta adivinhar…Quem sou eu?".

Objetivos: Desenvolver a compreensão das transformações geométricas e suas propriedades-rotação, reflexão, translação e reflexão deslizante; Conhecer e aplicar as noções de simetria axial e rotacional.

Descrição: No início da aula, a partir das propriedades comuns da rotação, reflexão, translação e da reflexão deslizante, a docente introduzirá a noção de isometria. Serão também introduzidas as noções de simetria axial e rotacional. Em continuação com o trabalho iniciado em aulas anteriores, os alunos continuarão a resolução de questões incluídas na folha de trabalho "Geometria *Sona*". Serão propostas, como motivação, a realização de uma sopa de letras "Isometria e simetrias" e de palavras cruzadas sobre "isometrias", bem como a resolução do desafio "Tenta adivinhar…quem sou eu?", com desenhos *sona*. Será lançado um desafio, no final da aula, aos alunos, para apresentar na aula seguinte, que consistirá na criação de um desenho cuja construção respeite as regras de execução dos *sona*, com critérios definidos e envolvendo as noções trabalhadas na aula.

- **Sessão 5** (março de 2012)

Tarefas/ atividades: Projeção de um *Powerpoint* intitulado "Simetrias no mundo" e de um *Powerpoint* intitulado "Isometrias e simetrias na arte, na natureza, na arquitetura,…"; Correção do desafio final.

Objetivos: Reconhecer que as simetrias estão presentes em atividades culturais e artísticas praticadas por diversos povos do mundo; Reconhecer, compreender e identificar as propriedades das isometrias estudadas; Reconhecer a presença de isometrias em artefatos culturais e na natureza.

Descrição: Visualização do *powerpoint* "Isometrias e simetrias na arte, na natureza, na arquitetura,…"; Seguir-se-á a visualização do *powerpoint* "Simetrias no mundo" no qual se exibem exemplos de simetrias presentes em atividades culturais, artísticas, etc. praticada por diversos povos do mundo; Por fim, realizar-se-á à correção do desafio lançado na aula anterior e à avaliação dos desenhos *sona* produzidos pelos alunos (de acordo com os critérios previamente fixados).

- **Sessão 6** (março de 2012)

Tarefas/atividades: Realização de teste de avaliação formativo; Aplicação de um Inquérito final a todos os alunos.

Objetivos: Avaliar os conhecimentos matemáticos dos alunos sobre isometrias e simetrias; Recolher a opinião dos alunos sobre as atividades realizadas pelos alunos e sobre o seu contributo para a aprendizagem matemática.

Descrição: Com o intuito de avaliar se os conhecimentos matemáticos trabalhados nas aulas foram compreendidos e assimilados de forma correta pelos alunos e quais os conteúdos matemáticos que terão de ser, de novo, abordados e sistematizados, será proposta a resolução de um teste de avaliação formativo. No final da aula, será aplicado um inquérito aos alunos em que se pretende recolher opinião sobre a sequência didática.

- **Sessão 7** (abril de 2012)

Tarefas /atividades: Teste de avaliação sumativo.

Objetivos: Identificar isometrias no plano e simetria (axial e rotacional) em figuras no plano; Reconhecer e aplicar as propriedades das isometrias. Resolver exercícios e problemas utilizando o conhecimento adquirido sobre isometrias e simetrias.

Descrição: Teste de avaliação sumativo, que pretende averiguar e avaliar se os conhecimentos matemáticos pretendidos foram compreendidos e assimilados de forma correta pelos alunos.

As tarefas da sequência didática

Segue-se uma descrição da tarefas implementadas nas sete sessões, tendo a investigadora tido a preocupação que estas fossem diversificadas relativamente à natureza, priviligeando-se tarefas e desafios que envolvessem a geometria *sona*. Optou-se por 17 tarefas distribuídas por várias sessões, sendo que a na primeira sessão fez-se uma apresentação da sequência didática que seria implementada e com a realização de um teste diagnóstico. Refira-se que todas as tarefas apresentadas aos alunos foram elaboradas pela docente - investigadora, tendo em conta o nível etário dos destinatários, o seu desenvolvimento cognitivo, as suas características e os objetivos de aprendizagem pretendidos. Segue-se uma descrição dos recursos utilizados e das tarefas propostas aos alunos.

Apresentação da sequência didática

A investigadora-docente começou por fazer uma breve apresentação da sequência didática, como forma de preparar os alunos, pois esta apresentava algumas novidades para os alunos (ao nível da apresentação e de formato).

Teste de avaliação diagnóstica

Através do teste diagnóstico, a docente pretendeu averiguar se os alunos tinham presentes a noção de reflexão (lecionada no 2.º ciclo), de translação (8.º ano) e da rotação (lecionado no 9.º ano), de molde a poder ajudar os alunos a ultrapassar possíveis dificuldades, reajustando as estratégias e atividades planeadas. O teste diagnóstico, constituído por três questões, teve a duração de cerca de 15 a 20 minutos (anexo 14).

Projeção de *Powerpoint* "Geometria *Sona*"

Através da projeção de um *powerpoint*[13] centrado na geometria *sona*, fez-se uma breve contextualização sócio-cultural e apresentou-se algumas das tradições e costumes do povo *Cowke* que a pratica. Evidenciou-se o traçado, com técnicas próprias, de inúmeras configurações geométricas envolvendo a ideias de isometria e simetria, muitas delas associadas a lendas, mitos e animais. Apresentou-se um número significativo de desenhos *sona* (alguns monolineares e outros não), com a respetiva legenda, e três histórias tradicionais *sona* e o respetivo desenho (que acompanha sempre a história). Sublinhou-se que esta tradição é passada de pais para os filhos masculinos e que faz parte do rito de iniciação (passagem à idade adulta). Descreveu-se parte da técnica de criação dos desenhos, que são desenhados sem levantar o dedo, não podendo passar duas vezes pela mesma linha mas podendo, no entanto, cruzar-se duas linhas. Referiu-se que, para este povo, o ato de levantar o dedo durante a execução do desenho representa um algo que envergonha o desenhador e é desenhado ao mesmo tempo que se conta a lenda, história ou fábula. Pretendeu-se, deste modo, criar condições para que os alunos apreciassem a presença de ideias matemáticas em artefactos culturais produzidos por um povo com pouca ou nenhuma escolaridade, viabilizando o estabelecimento de ligações entre matemática, a arte e cultura (anexo 18).

Ficha de apoio "Geometria *Sona*"

Tendo como objetivos motivar os alunos para a realização de atividades envolvendo os desenhos *sona*, terem a perceção da dificuldade da sua execução e apreciarem o lado estético dos mesmos, a primeira atividade proposta incidiu, precisamente, no traçado de alguns *sona* seguindo a técnica do povo *Cokwe*. Tendo como suporte uma ficha de apoio em que se reproduziram alguns dos desenhos sona visualizados no *powerpoint*, os alunos foram desafiados, usando como suporte papel ponteado quadriculado (anexo 6), a reproduzirem esses desenhos e, se o quisessem, outros dos também visualizados (figura 3.4).

13 Para a construção do powerpoint recorreu-se a fontes disponíveis on-line, nomeadamente a imagens que foram editadas pela docente – investigadora.

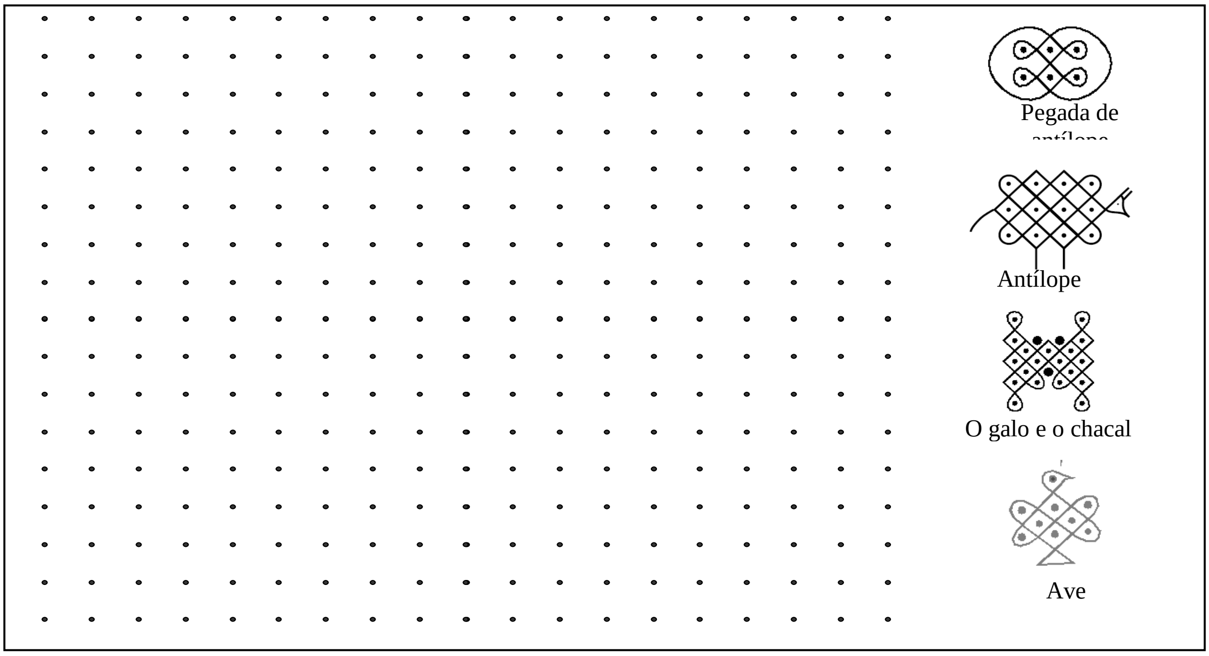


Figura 3.4: Desafio de traçar alguns *Sona* respeitando as regras de execução- ficha de apoio “Geometria *sona*

Projeção de *Powerpoint* “Isometrias na natureza, na arte, na arquitetura, …”

Através da projeção de um conjunto de diapositivos[14] contendo imagens do mundo físico (seres vivos) e de diversos artefactos culturais, procedeu-se a uma revisão das noções de reflexão, eixo de reflexão, translação, vetor associado a uma translação, rotação, centro de rotação e amplitude do ângulo associado a uma rotação e das propriedades destas quatro transformações geométricas. Introduziu-se, igualmente, a noção de reflexão deslizante (conceito novo). Pretendeu-se, igualmente, que os alunos percebessem que estas noções podem ser ilustradas com exemplos reais presentes no seu dia a dia, na natureza, na arte, na arquitetura, etc.. A docente teve a preocupação de apresentar exemplos muito próximos dos alunos e fáceis de entender, assim como de criar um *powerpoint* visualmente apelativo[15] (anexo 16).

Ficha de tarefas “Geometria *Sona*”

Para explorar os conceitos de isometria e de simetria axial e rotacional, planeou-se e desenvolveu-se uma sequência de nove tarefas integrando desenhos *sona*. Tentou-se diversificar o tipo de tarefas propostas, como forma de apresentar os conceitos de diferentes pontos de vista e simultaneamente promover uma maior motivação os alunos para a aprendizagem da matemática e para a realização

14 Para a construção do *powerpoint* recorreu-se a fontes disponíveis on-line, nomeadamente a imagens que foram editadas pela docente – investigadora.
15 Para a construção do *powerpoint* recorreu-se a fontes disponíveis on-line, nomeadamente a imagens que foram editadas pela docente – investigadora.

de tarefas matemáticas. Como fontes para o desenvolvimento dessas tarefas recorreu-se sobretudo às obras de Paulus Gerdes (2007, 2008).

À medida que os alunos iam dando resposta ao que era solicitado, a questão era, de imediato, corrigida pela docente, em voz alta, com a colaboração e prestação de todos os alunos. A docente respeitou o ritmo de cada aluno e verificou que muitos alunos eram autónomos e aplicados, tendo solicitado a docente para confirmar as suas respostas. Muitos deles, partilhavam e discutiam as suas respostas com o colega que estava ao lado ou com o grupo de colegas em redor. As tarefas foram propostas ao longo de quatro sessões (correspondentes a quatro aulas de noventa minutos de duração). Por questões relacionadas com a gestão do tempo de aula e com a natureza das tarefas, decidiu-se que algumas das tarefas seriam propostas para resolver em casa e, posteriormente, corrigidas em aula, valorizando-se assim o trabalho autónomo dos alunos (anexo 13).

As três primeiras tarefas, delineadas com o objetivo "Conhecer e respeitar as regras de construção de um lusona", consistiram, respetivamente, em percorrer a linha do *lusona* "amizade" (figura 3.5), desenhar o *lusona* "antílope" (figura 3.6) e construir livremente um *lusona* (figura 3.7).

Tarefa 1:

Percorre a linha do *lusona* da amizade (Figura 5) com o lápis, mas nota que:

- ✓ Não podes levantar o lápis do papel;
- ✓ Podes cruzar uma linha já feita anteriormente, mas não podes passar duas vezes sobre a mesma linha.

Figura 5

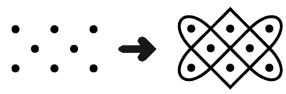
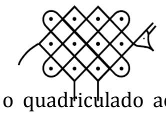
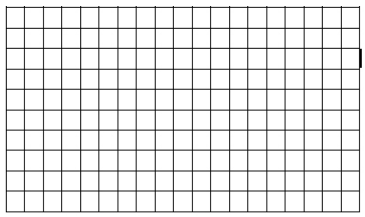


Figura 3.5. Tarefa: percorrer o *lusona* "amizade" –ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

Tarefa 2:

Para te ajudar a compreender como é que os desenhos *sona* são executados, proponho-te que desenhes um antílope.

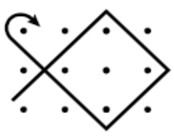




Marca sobre o quadriculado ao lado uma rede retangular de 3 por 4 pontos. Não te esqueças que os pontos devem ser marcados à mesma distância uns dos outros.

Ajuda: Para traçar o *lusona* segue as seguintes regras e toma a figura 6 como ajuda:

Figura 6



- ✓ As linhas circundam os pontos, nunca os tocando;
- ✓ O ponto de início do *lusona* é um ponto a meia distância de dois pontos consecutivos da rede retangular;
- ✓ As linhas do *lusona* são traçadas formando um ângulo de 45º com a horizontal, isto é, diagonalmente aos pontos da grelha;
- ✓ Ao sair da rede, a linha roda 90º ou, se estiver junto a um dos quatro cantos da rede, faz uma meia volta (um giro de 180º) e continua paralelamente à linha traçada anteriormente.
- ✓ Podes cruzar uma linha mas não podes passar duas vezes sobre a mesma linha.

No final, decora o teu antílope fazendo-lhe a cabeça, as pernas e a cauda.

Figura 3.6: Tarefa: traçar, respeitando as regras, o *lusona* "Antílope"- ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

Tarefa 3 (para realizar em casa - facultativo)

Desenha uma malha retangular de 4 por 6 pontos e traça um lusona seguindo as regras anteriores. O que observas? Quantas linhas diferentes tens de desenhar para completar o lusona?

Sugestão: Decora o lusona a teu gosto e dá-lhe um título.

Figura 3.7: Tarefa: desenhar livremente um *lusona*- ficha de tarefas "Geometria Sona"

As tarefas seguintes perseguiam como objetivo "Identificar regularidades em padrões de crescimento envolvendo desenhos *sona"*. Adaptadas a partir de APM, pretendia-se que os alunos: (i) desenhassem o terceiro termo de um padrão de crescimento, conhecidos os dois primeiros termos; (ii) desenhassem o segundo termo de um padrão de crescimento, conhecidos o 1.º e o 3.º termos e, por último, (iii) criassem um padrão de crescimento envolvendo um *lusona* e, de seguida, retirassem um dos termos e desafiassem um colega a representar o termo em falta (figuras 3.8 e 3.9).

Tarefa 4:

1. Os dois *sona* a seguir reproduzidos representam os dois primeiros termos de uma sequência de figuras. Observa-os com atenção e identifica a regra que permite passar de um desenho para o imediatamente a seguir.

Continuando o padrão, desenha no quadriculado o próximo termo da sequência.

Nota: deves tentar desenhar o *lusona* através de uma linha contínua.

2. Os dois *sona* a seguir reproduzidos representam o 1.º e o 3.º termo de uma sequência de desenhos. Observa-os com atenção e identifica a regra que permite passar de um desenho para imediatamente a seguir. Continuando o padrão, desenha no quadriculado o segundo termo da sequência.

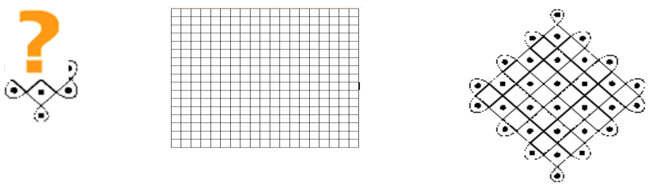


Figura 3.8: Tarefa: desenhar um termo de um padrão de crescimento –f icha de tarefas "Geometria *Sona*"

Tarefa 5 (Facultativa para casa)

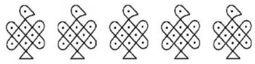
Inventa o teu *lusona* (um padrão de pontos e linhas). Faz uma sequência de desenhos que vão aumentando de acordo com o teu padrão. Retira um dos desenhos. Desafia um colega a descobrir o desenho que retiraste.

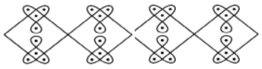
Figura 3.9: Tarefa: Desenhar um padrão de crescimento –ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

Para a tarefa 6 definiu-se como objetivo "Reconhecer um friso como um padrão que se pode obter realizando sucessivas translações de um motivo base". Como tal, apresentavam-se dois frisos e solicitava-se aos alunos que identificassem o motivo principal e caracterizassem a transformação geométrica que permite construir o friso dado a partir do motivo principal (figura 3.10).

Tarefa 6

Observa os seguintes frisos:

A) 

B) 

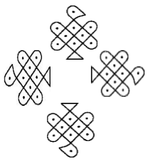
1. Identifica o motivo principal de cada um dos frisos.
2. Qual a transformação que permitiram construir os frisos A e B a partir do motivo principal? Carateriza-a.

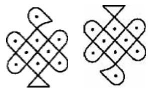
Figura 3.10: Tarefa: Frisos com desenhos *sona*- ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

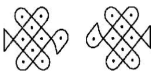
Na tarefa 7, cujo objetivo era "Identificar a transformação geométrica associada a uma dada figura que a deixa invariante (caso existisse)", incluíram-se doze composições de *lusonas* (na figura 3.11 apresentam-se nove dessas figuras).

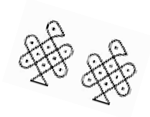
Tarefa 7

Identifica, caso exista, a transformação geométrica associada aos desenhos:

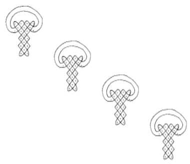
7.1 

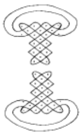
7.2 

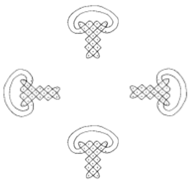
7.3 

7.4 

7.5 

7.6 

7.7 

7.8 

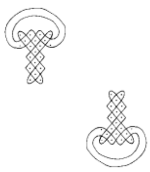
7.9 

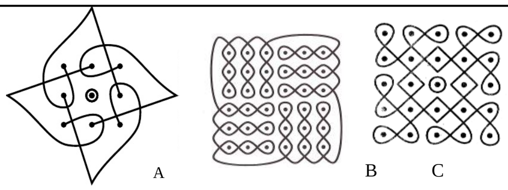
Figura 3.11: Tarefa: Transformações geométricas em composições de desenhos *sona*- ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

As duas últimas tarefas visaram a exploração da noção de simetria associando-a às transformações geométricas e ao conceito de isometria.

Na tarefa 8 (reproduzida na figura 3.12), pretendia-se introduzir a ideia de simetria rotacional através da identificação de uma componente base do desenho que, por sucessivas rotações com o mesmo centro permite obter o desenho no seu todo.

Tarefa 8

Observa os desenhos *sona*:



Cada um deles pode ser obtido partindo de um motivo principal e de uma isometria. Em cada caso, identifica o motivo principal, colorindo-o com uma caneta de cor, carateriza a isometria e indica o número de vezes que foi aplicada.

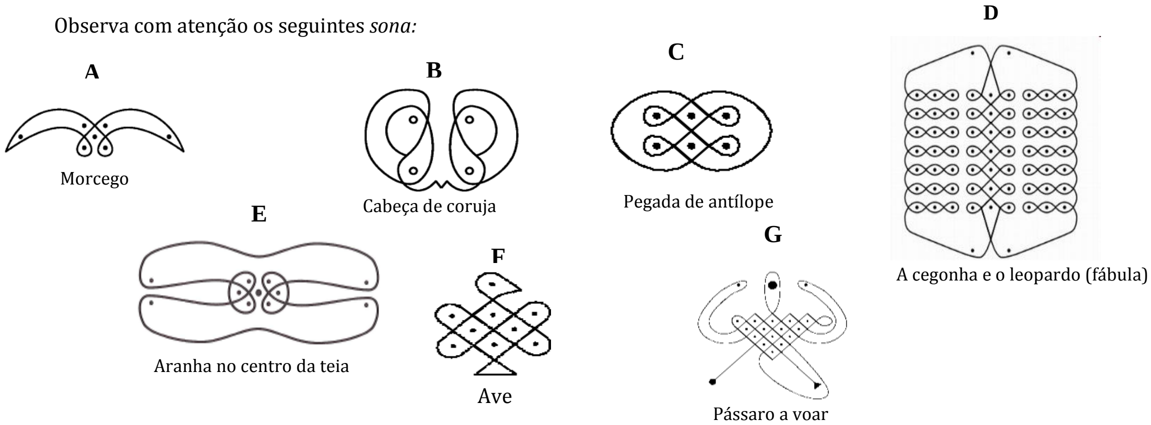
Figura 3.12: Tarefa: Motivo principal, caracterizar a isometria e o número de vezes aplicada- ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

A última tarefa tinha como objetivo "Compreender o conceito de figura simétrica, estendendo-o a figuras com simetria de rotação; reconhecer figuras com simetria de rotação e/ou simetria axial (ou de reflexão) e caraterizar o tipo de simetria de uma figura plana". Primeiramente era pedido aos alunos que identificassem desenhos *sona* com simetria axial, caracterizando todas as reflexões que os deixam invariantes. Depois, o pedido estendia-se à identificação de *sona* com simetria rotacional, caracterizando todas as rotação que os deixam invariantes (figura 3.13).

Tarefa 9

Outro dos aspetos matemáticos dos *sona* tem a ver com a presença ou não de **simetria** nos desenhos. Existem vários tipos de simetria, nomeadamente a **simetria axial e a simetria rotacional**.

Observa com atenção os seguintes *sona:*



9.1 Diz-se que uma figura plana tem **simetria de reflexão ou simetria axial** se existir uma reta que passa pela figura e que é um **eixo de reflexão** da figura.

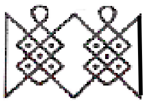
a) Quais têm eixos de simetria de reflexão?

b) Quantos eixos de simetria de reflexão tem cada um? Traça-os.

Figura 3.13: Tarefa 9- Simetria axial – ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

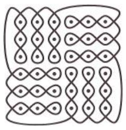
9.2 Diz-se que uma figura plana tem **simetria rotacional** se a figura coincide consigo mesma quando se roda um certo ângulo entre 0º e 360º em torno de um certo ponto. O **centro da rotação** é o ponto sobre o qual a figura roda.

A



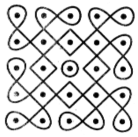
Dois patos a voar

B



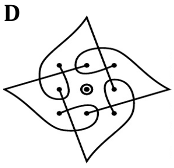
Leões machos a planear intrigas

B



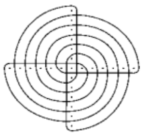
C

D

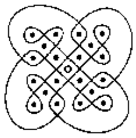


Teia de aranha

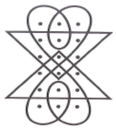
E



F

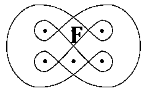


Aranha na sua teia



Ratoeira

F



Pegada de antílope

G

H

a) Diz quais das figuras acima têm simetria rotacional.

b) Desenha o centro de rotação de cada figura e indica a amplitude do ângulo de rotação.

Figura 3.14: Tarefa 9 (conclusão)- ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

Desafio "Sopa de letras e palavras cruzadas - Isometrias"

No início da quinta sessão, propôs-se aos alunos a realização de dois passatempos subordinado à temática das isometrias, uma "sopa de letras" (figura 3.15) e palavras cruzadas (figura 3.16). Pretendeu-se, deste modo, contribuir para uma maior consolidação dos conceitos matemáticos e respetiva terminologia trabalhados nas sessões anteriores e despertar o interesse para a realização das tarefas propostas em aula (anexos 12 e 8, respetivamente).

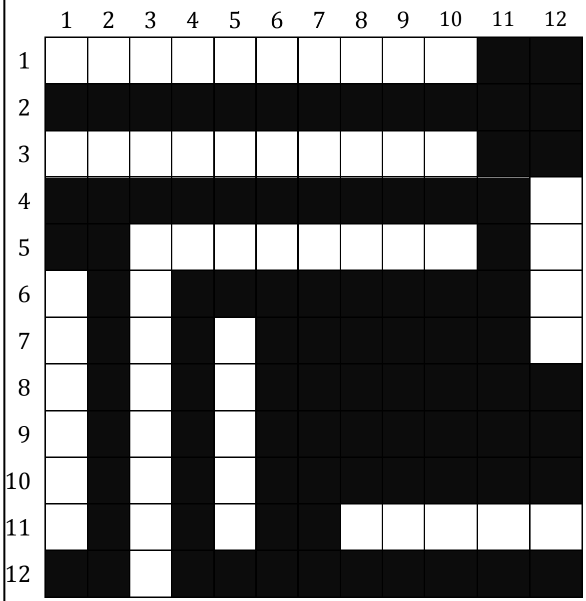
Sopa de Letras "Isometrias"

Procura, em todas as direções e sentidos, os termos:
- Simetria
- Translação
- Rotação
- Isométricos
- Vetor
- Eixo de simetria
- Isometria
- Reflexão deslizante
- Reflexão

S	I	M	E	T	R	I	A	C	A	P	S	E	P	A	S	N	V	C	V
T	W	P	U	O	P	W	Q	S	E	Q	W	P	Y	P	W	P	E	R	E
P	V	E	R	E	J	K	L	P	H	P	A	T	O	R	O	H	R	I	T
G	K	R	L	P	T	R	A	N	S	L	A	C	A	O	P	E	J	L	O
L	N	E	A	L	S	E	I	E	O	F	P	K	E	T	R	Ç	P	O	R
N	P	K	S	Ç	A	F	P	L	L	I	J	R	P	A	W	S	N	R	E
I	T	V	D	S	O	L	Y	P	P	R	Ç	E	N	C	A	E	F	E	O
L	I	P	Z	C	P	E	J	B	D	E	G	L	M	A	T	B	C	R	P
B	R	S	M	V	R	X	L	D	S	F	N	P	L	O	E	L	A	E	Y
O	K	Z	S	N	T	A	S	O	N	L	M	Ç	A	T	P	F	P	I	R
M	N	L	L	M	I	O	P	L	F	E	F	D	O	D	G	N	T	X	E
D	L	J	E	P	Z	P	C	S	A	X	A	E	F	J	S	M	X	O	H
N	P	T	Q	Q	B	J	B	A	O	A	O	R	S	A	L	S	L	I	S
J	X	E	F	P	K	N	M	E	D	O	X	M	B	T	E	X	O	D	A
O	I	W	S	O	L	F	A	J	L	P	H	E	O	S	A	O	Ç	E	F
M	S	S	L	E	Q	A	T	L	N	D	P	A	S	O	N	Ç	A	W	U
S	O	I	O	G	H	L	E	T	F	E	D	C	S	C	M	D	Y	S	B
H	R	L	S	M	O	E	P	F	C	S	P	M	C	I	D	V	E	I	D
O	J	B	P	A	E	S	Z	C	E	L	X	V	L	R	X	D	X	M	P
Q	S	L	O	S	A	T	E	A	U	I	A	C	A	T	O	A	L	E	C
A	L	A	X	M	X	N	R	O	X	Z	J	K	O	E	S	L	S	T	R
N	D	U	A	F	A	L	P	I	S	A	Ç	O	K	M	P	T	B	R	E
M	L	S	P	K	C	T	J	R	A	N	S	T	D	O	A	R	D	I	T
D	X	L	B	O	S	A	S	P	K	T	B	D	Z	S	C	X	Z	A	Y
I	O	A	E	A	M	I	O	I	V	E	N	S	A	I	S	P	T	P	C

Figura 3.15 – Sopa de Letras "Isometrias"

Palavras Cruzadas “Isometrias”



Vertical

1- O que mesmo que simetria de rotação

3- Isometria em que todos os pontos do transformado são obtidos rodando a figura inicial em torno de um ponto fixo segundo um ângulo orientado no sentido positivo ou no sentido negativo (plural)

5- Entidade matemática que se carateriza por uma direção, sentido e comprimento

12- Linha que separa duas figuras simétricas

Horizontal

1- Transformação geométrica que preserva a orientação e a amplitude dos ângulos (plural)

3- Isometria em que todos os pontos da figura original se deslocam segundo a mesma direção, o mesmo sentido e percorrendo a mesma distância

5- Isometria em que cada ponto da figura original e o correspondente da figura estão sobre uma reta perpendicular ao eixo de reflexão e igual distância desse eixo

11- O mesmo que simetria de reflexão

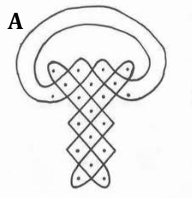
Figura 3.16 – Palavras Cruzadas “Isometrias”

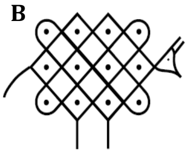
Desafio “Tenta adivinhar…quem sou eu?”

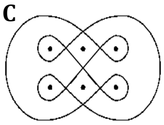
Como atividade de sistematização e usando como suporte uma ficha de trabalho, apresentaram-se aos alunos vários *sona*, tendo sido, inicialmente, solicitado que identificassem os que tinham eixo de reflexão vertical, eixo de reflexão horizontal, eixos de reflexão vertical e horizontal e os que não apresentavam nenhum eixo de reflexão (figura 3.17). A pergunta seguinte, centrada no conceito de simetria rotacional, contemplava a identificação dos motivos de alguns desenhos *sona* e pedia para caraterizar a isometria e o número de vezes que foi aplicada. Era, igualmente, pedido para identificar os desenhos que não apresentavam nenhum tipo de simetria (axial e rotacional) (anexo 10).

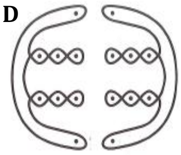
Tenta adivinhar ..... Quem sou eu?

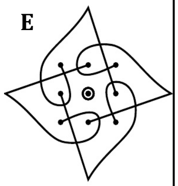
1. Nos desenhos sona reproduzidos abaixo, o desenho A tem um eixo de reflexão vertical e o desenho B não tem eixos de reflexão.

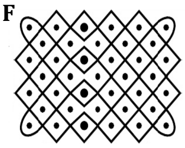
A


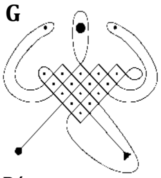
B


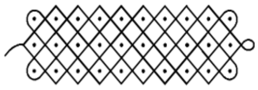
C

Pegada de

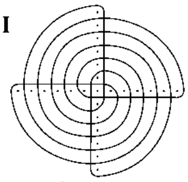
D


E


F


G

Pássaro a voar

H

Leoa

I

Aranha na sua teia

a) Que desenhos, além do A, têm um eixo de reflexão vertical?
b) Que desenhos têm um eixo de reflexão horizontal?
c) Que desenhos têm um eixo de simetria vertical e um eixo de simetria horizontal?
d) Que desenhos, além do B, não têm eixo de reflexão?

2. Observa de novo os desenhos *sona*. Alguns deles podem ser obtidos a partir de um motivo principal e de uma isometria. Por exemplo, o desenho C pode ser obtido a partir de um motivo principal e de uma rotação de amplitude 180º (a chamada meia-volta).

a) Identifica o motivo principal do desenho E, carateriza a isometria e indica o número de vezes que foi aplicada.
b) O que é que podes dizer sobre os desenhos A e F? Justifica.
c) E sobre os desenhos B e I? Justifica.

Figura 3.17: Tarefa: Tenta adivinhar … Quem sou eu?

“Desafio final”

Como desafio final lançado aos alunos pediu-se-lhes que criassem, em casa, desenho(s) *sona* com as seguintes caraterísticas: ser original, monolinear e conter, pelo menos, uma isometria (figura 3.18).

Desafio final

Desafio-te a **inventar** um desenho *sona* em que:
- Ao desenhares não levantas uma única vez o lápis ou caneta;
- Não passes duas vezes pela mesma linha;
- Contenha, pelo menos, uma isometria;
- Seja original.

Além de contar para a nota da disciplina, os melhores desenhos serão expostos na escola.
Critérios de avaliação:

Critérios de avaliação	Pontuação
Criatividade	10
Originalidade	10
Respeito pelas condições indicadas	70
Dificuldade da sua execução	10

Data de entrega: Próxima aula de Formação Cívica

Figura 3.18: Desafio final

Era intenção da docente que cada aluno apresentasse, na aula Formação Cívica, aos restantes elementos da turma o(s) seu(s) *sona* e que fosse o grupo turma, de acordo com os critérios de classificação definidos no desafio, a classificar e seriar os trabalhos apresentados. Desta forma, os alunos teriam de comunicar matematicamente com a turma durante a apresentação dos seus *sona* (anexo 3).

Projeção de *Powerpoint* " Simetrias pelo mundo"

Este *powerpoint*[16] pretendeu exibir isometrias e simetrias existentes em atividades socioculturais praticadas por diversos povos, etnias, grupos profissionais, etc. espalhados pelo mundo. Pretendeu-se sensibilizar os alunos para a universalidade da matemática (encontra-se em todos os continentes, é praticada por todas as pessoas, e que está presente no nosso quotidiano em muitos aspetos da nossa vida, mesmo sem termos, por vezes, consciência disso). Mostraram-se exemplos de isometrias/simetrias que podemos encontrar em vários países, nomeadamente em Portugal, nos tapetes de Arraiolos, nos azulejos, na calçada portuguesa, nos pavimentos, em casas tradicionais, na olaria e na cerâmica, em edifícios, nos monumentos, na cantaria, nos tapetes de flores, em algumas manifestações culturais e artísticas, em algumas varandas, etc. De Moçambique, chamou-se a atenção para os padrões de simetria presentes em malas, cestos, peneiras, bolsas, etc.. Do Gana, apresentaram-se cestos e panos de roupa, contendo inúmeras simetrias. Da Índia, chamou-se a atenção dos alunos para uma tradição realizada apenas por mulheres e transmitida de mãe para filha, muito próxima da tradição *sona*. De facto, esta consiste em desenhar no chão, em frente às casas, em datas importantes e com significado cultural e religioso. Da Indonésia, destacaram-se os padrões presentes em panos e tapetes. De Marrocos, sublinharam-se padrões presentes em monumentos e na arquitetura, tendo sido referido que a religião muçulmana não permitia desenhar paisagens ou pessoas, mas apenas figuras geométricas. De Bora, na Amazónia Peruana, exibiram-se imagens de diversos artefactos contendo muita geometria. Das ilhas de Vanuatu, na Oceânia, destacaram-se igualmente desenhos feitos na areia, muito semelhante à tradição *sona*. Ao contrário dos *sona*, estes desenhos são considerados património mundial imaterial da humanidade, pelo que não se encontram em vias extinção. Apresentou-se o litema (pintura mural praticada apenas por mulheres) na África do Sul assim como a cestaria Zulu, as mochilas arcuacas dos povos índígenas de Serra Nevada de Santa Maria, no Norte da Colômbia, os ovos pintados- Pessankas- na Ucrânia (tradição da Páscoa); La taracea (artesanato com materiais incrustados na capa) em Espanha, os Lambrequins, na Holanda. Mostrou-se a nível mundial, outros trabalhos manuais tais como rendas, monumentos, o artesanato africano, nas bandeiras de vários países e mostrou-se alguns frisos decorativos, presentes pelo mundo inteiro (anexo 20). Foi também dada uma atenção especial à

16 Para a construção do *powerpoint* recorreu-se a fontes disponíveis on-line, nomeadamente a imagens que foram editadas pela docente – investigadora.

presença de isometrias na natureza. A docente teve a preocupação de diversificar os exemplos dados, com imagens apelativas e com bastante estética e beleza, para que os alunos admirassem o lado estético da matemática e desenvolverem uma maior apreciação da disciplina.

Teste de avaliação formativo sobre isometrias e simetrias

Com a realização de um teste de avaliação formativo, pretendeu-se avaliar se os conhecimentos matemáticos trabalhados foram corretamente assimilados pelos alunos, nomeadamente: identificar e caracterizar as diferentes isometrias e reconhecer as suas propriedades. Procurou-se que as questões fossem concomitantes com as experiências matemáticas de aprendizagem proporcionadas pela atividade desenvolvida (no anexo 15 apresenta-se o enunciado do teste). Apresenta-se de seguida uma tabela síntese com as questões e objetivos de cada questão (tabela 3.6).

Nº questão	Questão	Objetivo da questão
1	Observa as seguintes figuras e indica, se existir, qual a isometria (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante) que transforma a figura A na figura B, respetivamente.	Reconhecer a isometria entre duas figuras
2.a	Indica o número de simetrias de reflexão contidas na figura dada	Identificar o número de simetrias de reflexão de uma figura
2.b	Indica o número de simetria de rotação contidas na figura dada	Identificar o número de simetrias de rotação de uma figura
3	Com o que foste aprendendo sobre isometrias, analisa cuidadosamente cada uma das transformações anteriores e preenche o quadro que se segue	Reconhecer as propriedades das quatro isometrias estudadas

Tabela 3.6: Quadro síntese das questões e objetivos de cada uma dela no teste de avaliação formativo

De acordo com Fernandes (2005, p. 81), *a diversificação de métodos de recolha de informação permite avaliar mais domínios do currículo, lidar melhor com a grande diversidade de alunos presentes na sala de aula e também reduzir os erros inerentes à avaliação*. Assim, releva-se que as diferentes formas de comunicação e interação entre os alunos e entre os alunos e a docente, numa sala de aula assumem um papel fundamental na avaliação das aprendizagens. Os progressos e dificuldades dos alunos na aprendizagem podem ser melhor identificados na realização da atividade e experiência matemática proporcionadas por tarefas criteriosamente selecionadas tendo em vista os objetivos, conhecimentos e competências a desenvolver. Por esse motivo, realça-se que as tarefas de aprendizagem também eram de avaliação e o *feedback* obtido foi usado de forma intencional, sistemática e continuada ao longo da sequência didática de forma a que os alunos pudessem ser lembrados dos níveis de aprendizagem que precisavam alcançar, ficassem conscientes dos próprios progressos e aprendessem a rentabilizar o trabalho de grupo para potenciar a aprendizagem.

Teste de avaliação sumativo

A sequencia didática terminou com a realização de um teste de avaliação sumativo. Este continha quatro questões: a primeira questão remetia para a identificação caso existisse, da transformação isométrica que deixa invariante uma figura dada. A segunda questão continha várias alíneas, e pedia-se que o aluno traçasse a imagem de uma figura por meio de uma reflexão dado o eixo de reflexão; a imagem obtida através de uma translação associada a um vetor dado, a imagem por uma rotação, conhecido o centro e a amplitude de rotação. Na terceira questão, o aluno tinha que identificar o eixo de simetria de uma figura. Finalmente, na quarta questão pedia-se ao aluno para descrever o tipo de simetrias (axial e rotacional) de figuras dadas, referindo o seu eixo de simetria, o centro da rotação e a amplitude do ângulo da rotação. Esta ficha foi realizada na primeira semana do 3.º período, após os 15 dias de interrupções letivas da Páscoa, pois queríamos averiguar se de facto, os conceitos matemáticos tinham sido assimilados (anexo 22).

Apresenta-se o quadro resumo com as questões e os seus objetivos, na tabela 3.7:

Nº de questão	**Objetivo da questão**
1	Identificar, caso exista, a transformação isométrica que deixa invariante uma figura dada
2	Construir a imagem de um polígono dado: através de uma reflexão, dado o eixo de reflexão; através de uma translação dado o vetor associado; e através da rotação indicando o centro da rotação e a amplitude do ângulo.
3	Identificar o eixo de simetria de uma figura
4	Descrever o tipo de simetrias (axial e rotacional) de figuras dadas, referirindo o seu eixo de simetria, o centro da rotação e a amplitude do ângulo da rotação

Tabela 3.7: Síntese das questões do teste de avaliação sumativo

Ficha de trabalho sobre isometrias e simetrias

Apesar de a docente - investigadora ter entregue uma ficha de tarefas sobre isometrias e simetrias, com base nos desenhos *sona*, sentiu a necessidade de realizar outra ficha de trabalho contemplando mais exercícios, nomeadamente, sobre simetria axial e rotacional, pois os desenhos *sona* apresentados contemplavam unicamente rotações de amplitude 90.º e de 180.º. A docente - investigadora, ao elaborar a referida ficha de trabalho pretendia mostrar aos alunos que não existem unicamente rotações com estas amplitudes, tendo para isso apresentado rotações com outras amplitudes em objetos do nosso dia a dia (anexo 5).

Ficha de apoio sobre isometrias e simetrias

A docente elaborou uma ficha de apoio sobre os conceitos de isometrias e simetrias (axial e rotacional), para entregar aos alunos, dado que a apresentação destes conceitos foi exibida através de *powerpoint*. A ficha contemplava a descrição de cada uma das isometrias, as suas propriedades e exemplos das mesmas, presentes no nosso dia a dia e em várias áreas do conhecimento, para os alunos terem um suporte escrito e resumido dos conceitos matemáticos dados (anexo 7).

Desafio Concurso "Foto com simetria"

Este último desafio, denominado “Concurso -Foto com simetria”, foi lançado aos alunos na antepenúltima sessão, onde se pedia a identificação, na sua região, em paisagens, fachadas de monumentos ou prédios, pormenores em igrejas ou monumentos, calçadas, painéis ou outros, exemplos de isometrias e o seu registo fotográfico. Os alunos poderiam organizar-se em grupo, para futuramente organizar na escola numa exposição de fotografias com o tema: “Isometrias na nossa terra”. A cada fotografia podiam associar um texto e identificar a(s) isometria(s) presentes nas imagens recolhidas. Apesar de muitos alunos terem tirado fotografias e de as suas produções fotográficas terem integrado a exposição comemorativa do Dia do Agrupamento, realizada no final do ano letivo, este desafio não é objeto de análise desta investigação por ter sido proposto a todas as turmas do nono da escola, tendo o período da sua execução ultrapassado em muito o tempo dedicado à sequência didática. Contudo considerou-se uma proposta desafiante, diferente das restantes e com aplicações práticas, para desta forma aumentar a apreciação e a valorização da matemática, da sua presença no dia a dia, em várias situações, em vários objetos e para contemplar o lado estético na matemática. Neste concurso, desafiava-se os mais curiosos para investigar o que eram frisos, rosáceas, pavimentações e pavimentações de Escher. Por fim, informava-se de alguns sites que podiam ser consultados para saber mais sobre as pavimentações, as isometrias, a vida e obra de Escher e Escher e as pavimentações (anexo 4).

Ficha de trabalho informativa “Se queres saber um pouco mais sobre a Geometria *sona*…”

Esta ficha foi elaborada, a pedido dos alunos, para saber um pouco mais sobre a geometria *sona* e do povo que a pratica, dado o interesse que suscitou na maioria dos alunos. Para tal, a docente elaborou a referida ficha contendo alguns sites relacionados com a geometria *sona* e com outras atividades sócio-culturais produzidas por outros povos, contendo isometrias e simetrias. A ficha continha, igualmente, algumas propostas para o aluno investigar (a título facultativo) e que eram: procurar produtos ou marcas que usem padrões repetidos nos seus anúncios ou logótipos. Na mesma ficha, informava-se que Paulus Gerdes é um matemático holandês que se tem dedicado ao estudo dos *sona*, tradição em desuso. Informava-se que na Internet, o aluno poderia encontrar mais informações e imagens destes desenhos e eram apresentados alguns endereços, a partir dos quais os alunos poderiam encontrar outros. Sugeria-se ainda a pesquisa de atividades culturais de outros povos espalhados pelo mundo e, finalmente, procurar atividades culturais no nosso país em que estejam presentes isometrias. (exemplo, no folclore, na cantaria, nos azulejos, nos Tapetes de Arraiolos, etc.) (anexo 9). Com este recurso pretendia-se aguçar a curiosidade dos alunos, o interesse e aumentar, igualmente a sua cultura matemática, a apreciação pela disciplina e o desenvolver atitudes positivas e afetivas por esta ciência.

Capítulo 4 - Apresentação e análise dos dados

Nota Introdutória

O presente capítulo destina-se a apresentar, analisar e discutir a informação recolhida no decorrer da investigação, estando constituído por duas partes. Na primeira parte far-se-á a apresentação dos dados e na segunda parte a análise e discussão dos mesmos.

Por forma a enquadrar o estudo, começa-se por fazer uma breve caraterização da escola e da turma onde se desenvolveu a investigação. Como já foi referido anteriormente, os inquéritos por questionário foram aplicados aos discentes de uma turma de 9.º ano de escolaridade, constituída por 24 alunos. Importa, em primeiro lugar, referir que apenas responderam ao questionário 23 alunos, pois o questionário foi aplicado na última semana de aulas do 2.º período e um dos alunos não esteve presente nas aulas. Considerou-se que não seria oportuno a sua aplicação 15 dias (correspondentes à interrupção letiva da Páscoa) após o mesmo ter sido aplicado aos restantes alunos da turma. Assim, tendo sempres presente as questões de investigação, começa-se por fazer a apresentação dos dados recolhidos junto dos alunos. Relembra-se que o estudo é de índole qualitativo, sendo a análise de dados predominantemente uma análise de conteúdo. Contudo, optou-se por complementar essa análise com uma análise quantitativa de alguns dos dados recolhidos através de inquérito por questionário, por se considerar que o recurso a tabelas e gráficos ajuda a sistematizar a informação e contribui para uma visão mais ampla dos alunos participantes no estudo. Em relação a todas as produções escritas dos alunos (respostas aos três testes - diagnóstico, formativo e sumativo – e evidências da atividade dos alunos resultante das tarefas propostas pela docente) procede-se uma análise de conteúdo, suportada pelas categorias de análise definidas no capítulo anterior, em que se procura salientar os aspetos mais relevantes, por vezes transcrevendo algumas respostas.

4.1 Apresentação dos dados

4.1.1 Caraterização da escola

A Escola onde decorreu o estudo era frequentada, no ano letivo 2011/12, por mais de 1200 alunos. Situada no concelho de Sintra, sede de um Agrupamento de Escolas, do qual fazem parte três escolas do 1.º ciclo do Ensino Básico, integra o Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP). Em 2010, ficou na 15.ª posição, ao nível de exames nacionais, no *ranking* das 20 piores escolas a nível nacional (é acompanhada por mais 3 escolas do mesmo concelho). Ao nível dos exames nacionais do 9.º ano, é de registar que, a nível nacional, a taxa de sucesso na disciplina de Matemática foi de 51%. Relativamente ao concelho de Sintra essa taxa de sucesso foi de 41,8%, enquanto que, ao nível do agrupamento, a escola alcançou uma taxa de 14,7% de sucesso.

4.1.2 Caraterização da Turma

Para a caraterização da turma participante no estudo recorreu-se às fichas individuais dos alunos, bem como aos inquéritos por questionário aplicados aos alunos no início e no final da sequência didática, já descritos no capítulo relativo aos procedimentos metodológicos (anexo 11).

Após uma descrição da turma e do agregado familiar dos alunos, apresentam-se os dados recolhidos sobre a relação dos alunos com a disciplina de matemática, a apreciação das tarefas propostas e realizadas nas aulas envolvendo desenhos *sona* e o desempenho dos alunos nas tarefas propostas.

Dados gerais

A turma é constituída por 24 alunos, 7 raparigas e 17 rapazes, com idades compreendidas entre os 14 e os 19 anos. Na figura 4.1. apresentamos a distribuição das idades dos alunos por género, salientando-se a maior heterogeneidade das idades dos rapazes. A amplitude total das idades é de 5 anos, embora, sendo que 8,3% das raparigas têm mais de 15 anos contra 29, 2% dos rapazes.

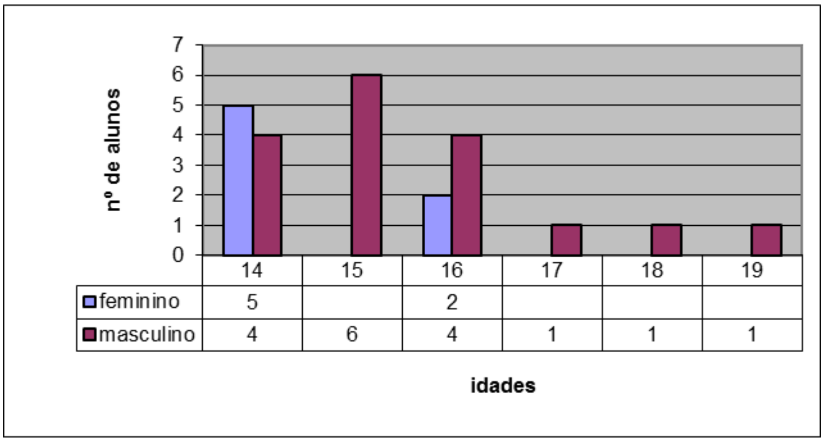


Figura 4.1. Distribuição das idades dos alunos por género

No que respeita à naturalidade dos alunos, 58,3% são portugueses distribuindo-se os restantes por países como Cabo Verde (12,5%), Angola (12,5%), Roménia (4,2%), Brasil (4,2%), Guiné-Bissau (4,2%) e Moçambique (4,2%). Refira-se que 33,4% dos alunos são provenientes de Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa (PALOPS). Na figura 4.2 apresenta-se a distribuição da naturalidade dos alunos por género, sendo de notar que 45,8% dos rapazes são de nacionalidade portuguesa, enquanto que nas raparigas essa percentagem fica-se pelos 8,3%.

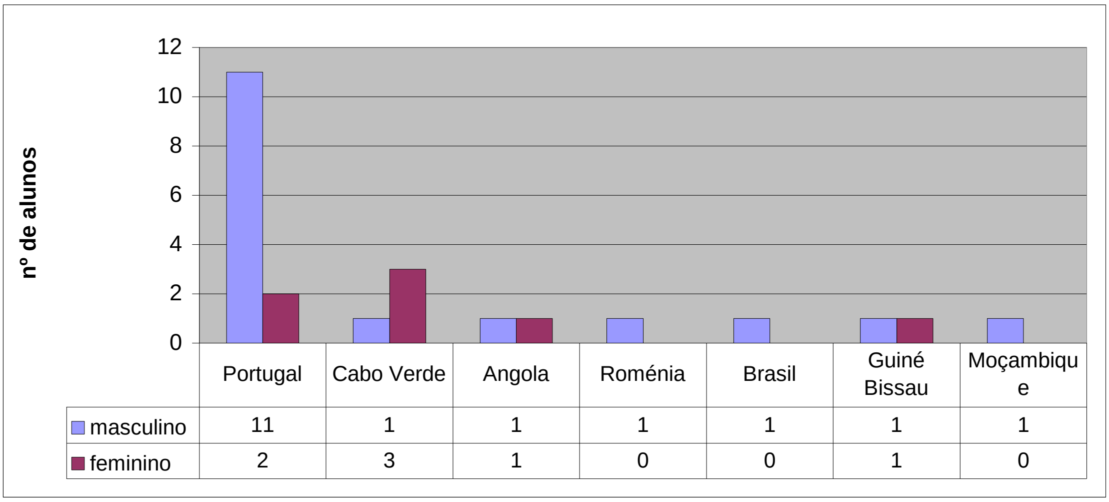


Figura 4.2. Naturalidade dos alunos

Inquiridos sobre a naturalidade dos pais, os dados recolhidos permitem constatar que 52,2% dos alunos têm, pelo menos, um dos progenitores português e que 43,5% têm ambos os pais naturais de Portugal (figura 4.3).

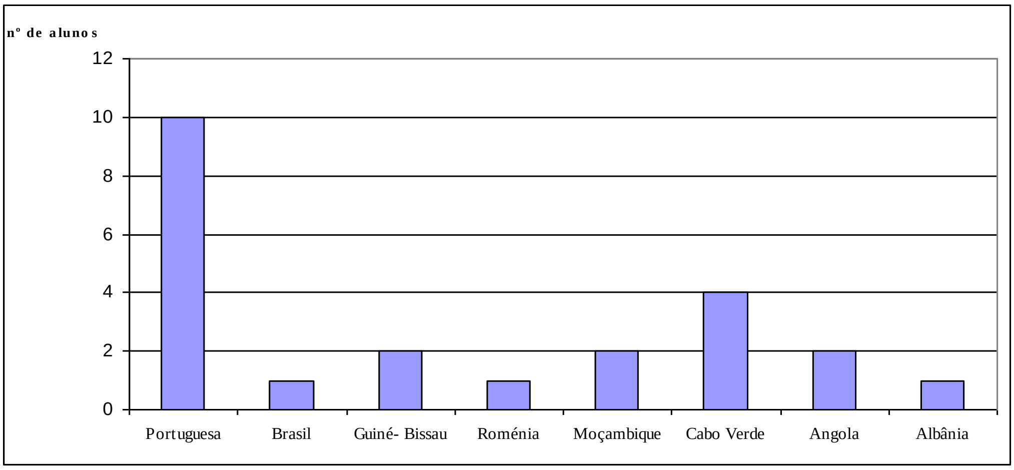


Figura 4.3. País de origem dos pais dos alunos

Como podemos observar na figura 4.4, em relação à naturalidade das mães dos alunos, constatamos que 43,5% das mães são de nacionalidade portuguesa e 52,5% são de outra nacionalidade, distribuindo-se da seguinte forma: Brasil (4,3%), Guiné Bissau (8,7%), Roménia (4,3%), Moçambique (8,7%), Cabo Verde (17,4%), Angola (8,7%) e Albânia (4,3%).

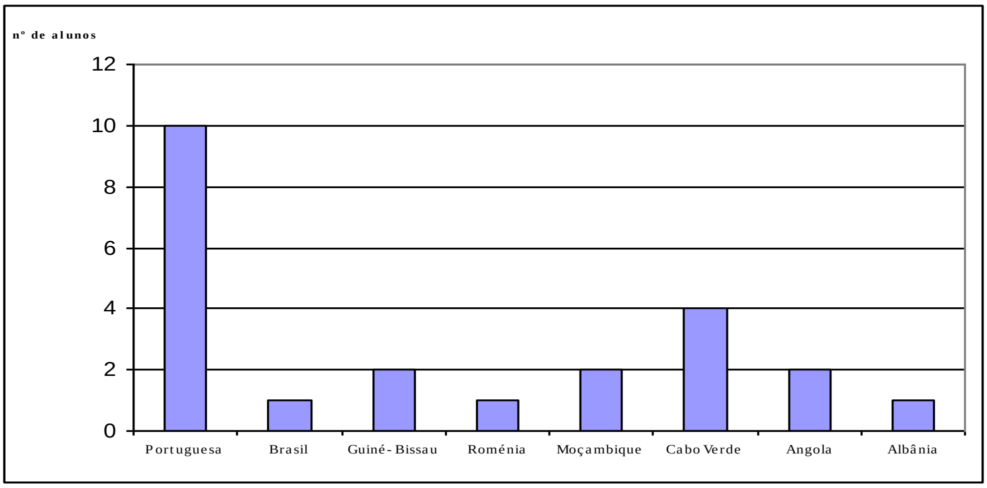


Figura 4.4. País de origem das mães dos alunos

Os dados apresentados evidenciam que a turma apresenta uma grande diversidade cultural.

No que concerne à profissão do pai dos alunos verificamos que 30,4% dos pais trabalham na construção civil, 13% dos pais pertencem ao quadro médio de uma empresa e com a mesma percentagem temos pais desempregados. Os restantes distribuem-se por outras profissões (figura 4.5).

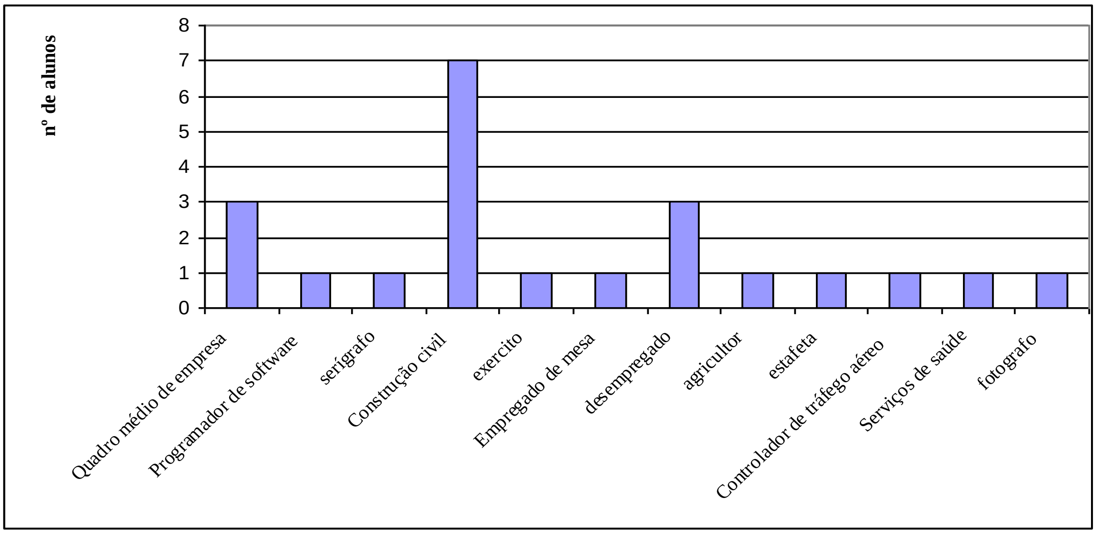
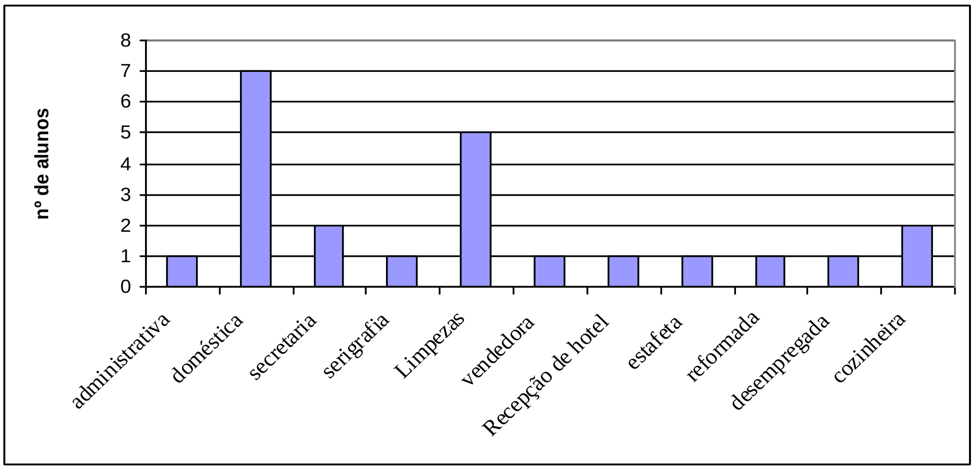


Figura 4.5. Profissão de cada pai dos alunos

Em relação à profissão da mãe, 30,4%, são domésticas, 21,7% trabalham em limpezas e 8,7% são cozinheiras (figura 4.6). As restantes mães, em menor percentagem, desempenham outro tipo de profissão.



. Figura 4.6. Profissão de cada mãe dos alunos

No que concerne à formação académica dos pais dos alunos, verificamos que 21,7% possuem o 1.º ciclo do ensino básico, 30,4% possui o 2.º ciclo de escolaridade, 21,7% possui o 3.º ciclo, 26,1% têm formação ao nível do secundário e não se regista a existência de pais com formação de nível superior (figura 4.7).

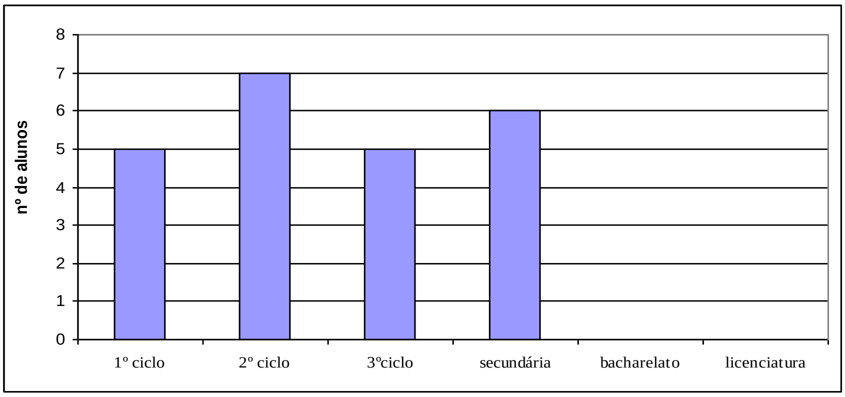


Figura 4.7. Formação académica dos pais dos alunos

Relativamente à formação académica das mães dos alunos constatamos que 21,7% possui formação ao nível do 1.º ciclo, 30,4% possuem o 2.º ciclo, seguida de 26,1% com formação ao nível do 3.º ciclo, 13,0% do secundário e 8,7% possui um bacharelato (figura 4.8). Verifica-se que não há nenhuma mãe detentora de algum grau académico (bacharelato ou licenciatura). Portanto, predomina em ambos os progenitores um nível de escolaridade que não excede o ensino básico.

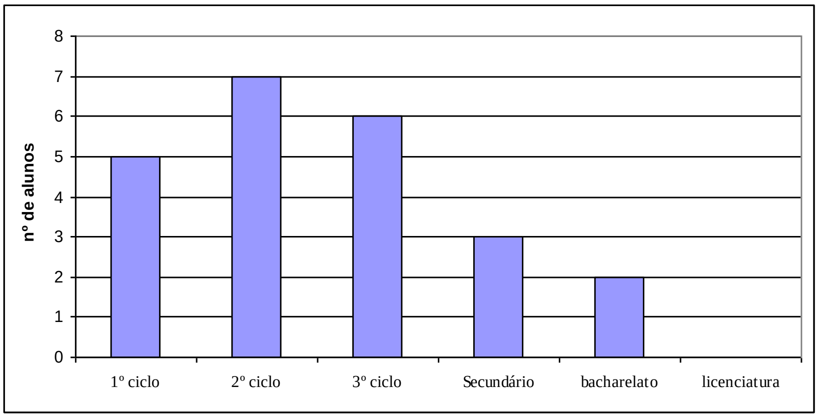


Figura 4.8. Formação académica das mães dos alunos

Em termos de desempenho académico dos alunos, começa-se por apresentar os resultados obtidos, no primeiro período do ano letivo 2011/12, pelos alunos participantes no estudo. A representação gráfica da distribuição desses resultados (figura 4.9), permite evidenciar que 48,5% obtiveram um nível inferior a três em três ou mais disciplinas; 16,7% um nível inferior a três em duas disciplinas; 8,3% um nível inferior a três numa disciplina e 29,2% obtiveram um nível superior ou igual a três a todas as disciplinas.

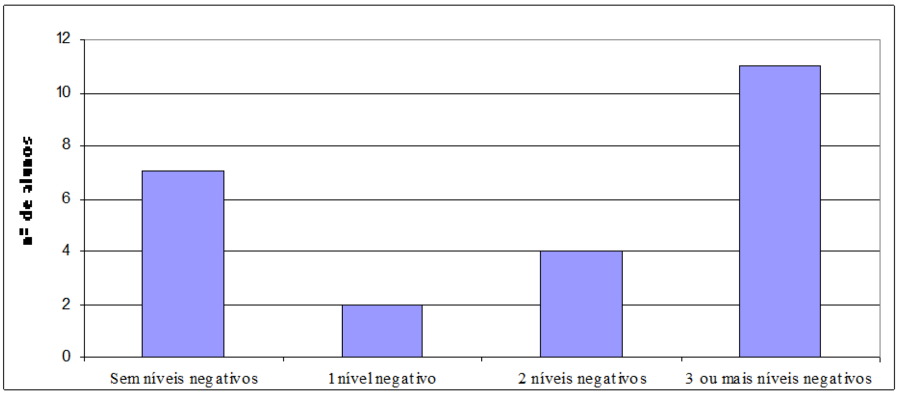


Figura 4.9. Número de níveis inferiores a três a todas as disciplinas do 1.º período do ano letivo 2011/12

Trata-se, portanto, de uma turma heterogénea com uma taxa de insucesso global considerável. O nosso conhecimento da turma, enquanto professora e diretora de turma, leva-nos a afirmar que o baixo rendimento escolar é devido, em grande parte, à falta de atenção e de concentração nas aulas, à ausência de hábitos de estudo e a um défice na qualidade do estudo.

No que respeita aos resultados alcançados na disciplina de Matemática no 1.º período do ano letivo 2011/12, temos que 46% obteve nível inferior a três e 54% tiveram nível igual ou superior a três nesta disciplina (figura 4.10). Podemos, deste modo, relevar a existência de insucesso considerável à disciplina de Matemática, devido em grande parte aos motivos apresentados acima.

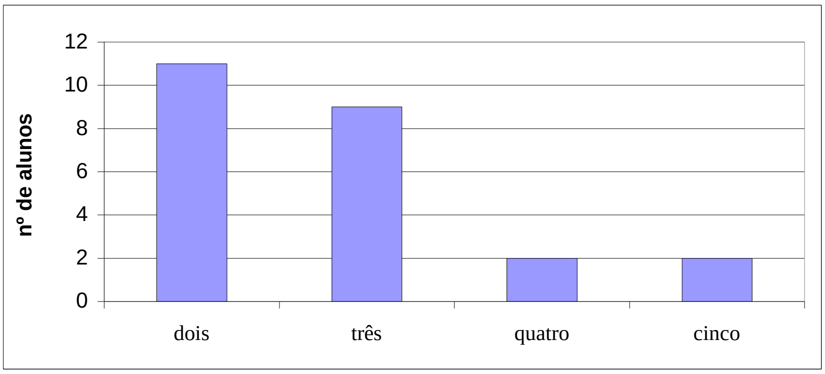


Figura 4.10. Notas no 1.º período à disciplina de Matemática no presente ano letivo 2011-12

Quanto ao número de retenções dos alunos, a figura 4.11 mostra que apesar da maioria (58%) dos alunos nunca ter registado uma retenção escolar, 42% já registou algum episódio de retenção. Dos dez alunos que já tiveram algum episódio de retenção no seu percurso escolar é de destacar que seis alunos já o fizeram pelo menos duas vezes. Sendo que 17% desses alunos registou um episódio de retenção, 21% dois episódios de retenção e 4% já ficou retido três ou mais vezes.

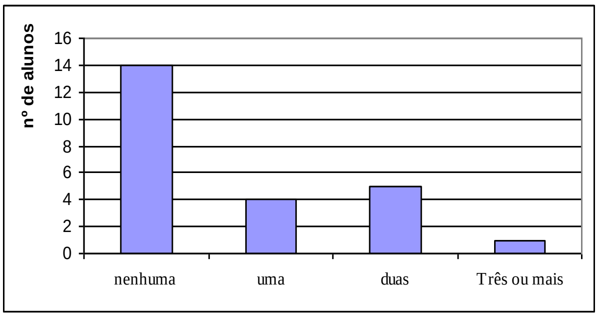


Figura 4.11. Número de retenções dos alunos

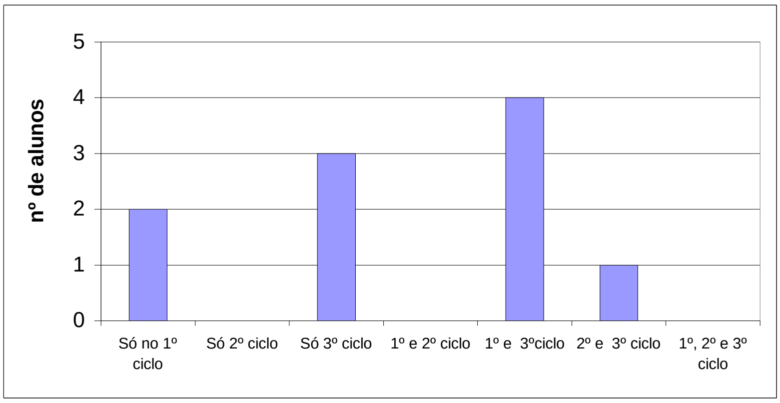


Figura. 4.12. Ciclo de retenção dos alunos

Na figura 4.12 ilustra-se a situação relativamente ao ciclo em que ocorreram as retenções. Podemos observar que dos alunos tiveram alguma retenção, 50% esteve já retido num ciclo de escolaridade (ou seja no 1.º ciclo ou no 2.º ciclo ou no 3.º ciclo), 50% ficou retido em dois ciclos (1.º e 2.º ciclos ou 1.º e 3.º ciclos ou 2.º e 3.º ciclos) e não se regista nenhum aluno que tenha ficado retido nos três ciclos do ensino básico (1.º, 2.º e 3.º ciclos).

No que concerne ao agregado familiar, verificamos que 33% dos alunos tem um agregado familiar composto por quatro pessoas, 17% vivem em famílias numerosas com 6 ou 7 pessoas e 21% dos alunos vivem em agregados familiares constituído por 5 pessoas (figura 4.13).

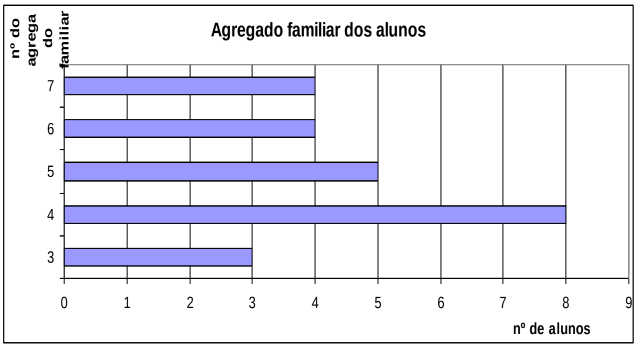


Figura. 4.13. Número de elementos do agregado familiar dos alunos

Quanto ao Apoio Social Escolar, constatamos que 38% dos alunos (9 alunos) beneficiam deste apoio, sendo que cinco destes beneficiam do escalão máximo (nível 2) (figura 4.14).

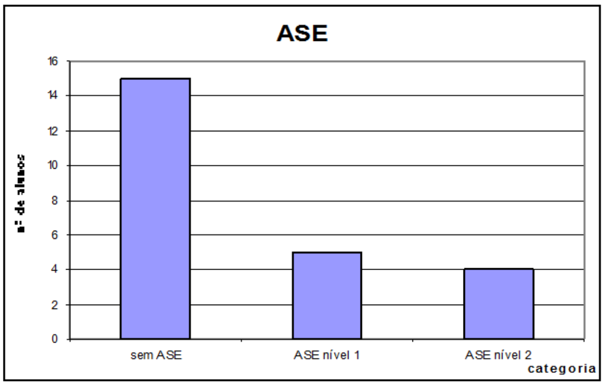


Figura 4.14. Benefício do ASE no presente ano letivo

Resumidamente, podemos afirmar que esta turma contempla, no geral, alunos com baixo nível sócio-económico, com pais que possuem pouca escolaridade e com profissões modestamente remuneradas, alunos de diversas nacionalidades (turma com uma grande diversidade cultural), com diversas expetativas e realidades culturais díspares, com uma taxa de repetição escolar considerável e com significativas dificuldades a nível escolar e mais concretamente na disciplina de matemática.

Relação dos alunos com a disciplina de matemática

Algumas das questões formuladas no inquérito por questionário aplicado aos alunos permitiram recolher dados sobre o gosto pela disciplina de matemática, o grau de dificuldade da disciplina e sobre a utilidade na matemática, que passamos a apresentar.

Quando questionados sobre o gosto pela disciplina de matemática, o grau de dificuldade da disciplina e sobre a utilidade na matemática, os dados obtidos permitem destacar que uma percentagem significativa de alunos, 56,5%, assumem não gostarem de matemática. Cruzando estes dados com o género dos alunos não se observam, nesta turma, diferenças entre rapazes e raparigas relativamente ao gosto pela matemática. A este sentimento contrapõe-se a constatação de que uma percentagem muito significativa reconhece a utilidade da matemática, como está evidenciado na figura 4.15.

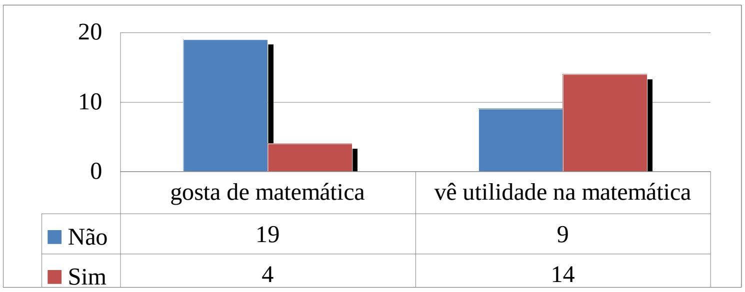


Figura 4.15. Relação com a matemática

É de relevar que 61% dos alunos da turma consideram a matemática difícil, sendo de registar que são os rapazes que em maior número manifestam esta opinião (figura 4.16).

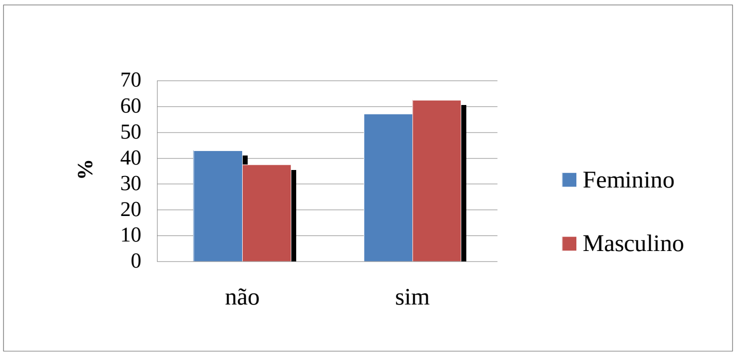


Figura 4.16. Opinião sobre a dificuldade da matemática

Reação às tarefas envolvendo desenhos *sona*

Esta análise incidirá sobre o questionário final aplicado aos alunos e o questionário aplicado a seis alunos, complementado com as notas de campo registas pela docente - investigadora no decurso da sequência didática. No questionário aplicado aos alunos, estes foram inquiridos sobre se já conheciam os desenhos *sona*, se acharam interessante a tradição *sona* e sobre se tinham curiosidade em conhecer outras manifestações artísticas do povo *Cokwe*. Dos dados recolhidos e analisados, destaca-se que nenhum dos alunos conhecia os *sona*, apenas um não achou interessante essa tradição e cerca de 39% não manifestaram interesse em conhecer outras manifestações artísticas dos *Cokwe.* No gráfico da figura 4.17 sobressai que são as raparigas as que revelam menos interesse por este tipo de tradições culturais.

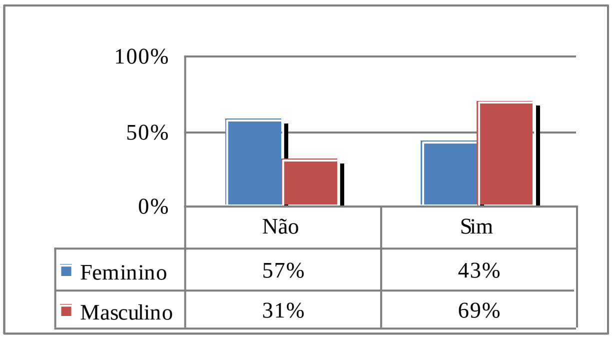


Figura 4.17: Interesse manifestado pelas tradições dos *Cowke*

Tratando-se de uma turma multicultural, da qual faziam parte uma percentagem muito significativa de alunos com origens africanas, interessou-nos saber se existia alguma relação entre a origem cultural dos alunos e o interesse pelas manifestações artísticas de povo *Cokwe.* O gráfico da figura 4.18, em que se cruza a nacionalidade e a resposta dada a esta questão, revela que a maioria dos alunos portugueses (60%) ficou interessada em saber mais sobre manifestações culturais do povo *Cokwe*. Os alunos oriundos de Angola, da Guiné - Bissau e da Roménia manifestaram interesse, ao contrário do aluno brasileiro e do aluno moçambicano. Chamamos a atenção para o facto de os 40% dos alunos portugueses que não manifestaram interesse pelas manifestações artísticas do povo *cokwe*, a quase totalidade destes alunos, apesar de ter nacionalidade portuguesa, tem pais oriundos de Angola ou de Cabo Verde. Pelo que, é provável, a opinião manifestada não reflita de facto a sua impressão em relação ao povo *Cokwe* e às suas manifestações sócio-culturais.

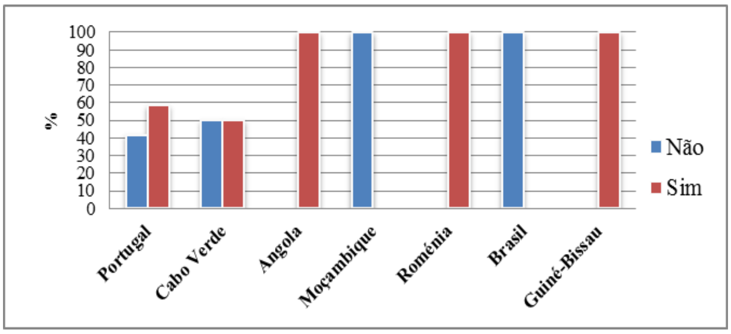
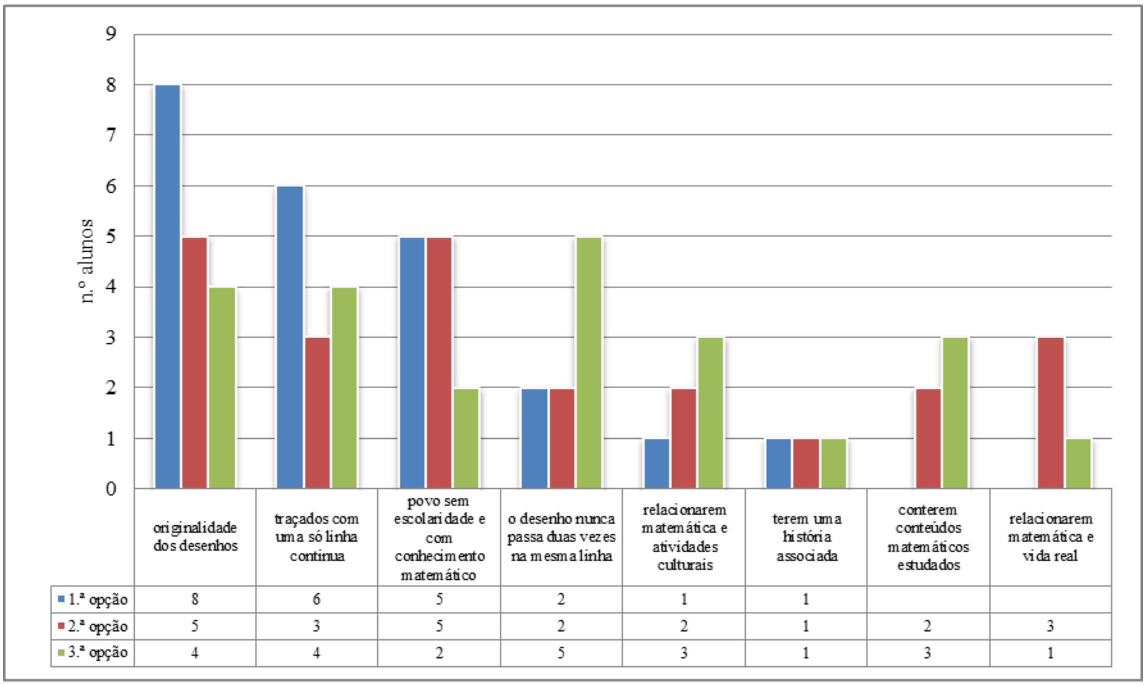


Figura 4.18. Interesse pelas tradições do povo *Cokwe* por nacionalidade dos alunos

Questionados sobre se tinham considerado interessantes as atividades realizadas nas aulas, a totalidade dos alunos respondeu afirmativamente. Já no que respeita aos aspetos dos *sona* que os alunos consideram mais interessantes, foi pedido aos alunos que os hierarquizassem por ordem crescente um conjunto de aspetos elencados no questionário. Os dados obtidos encontram-se sintetizados na figura 4.19.



	originalidade dos desenhos	traçados com uma só linha contínua	povo sem escolaridade e com conhecimento matemático	o desenho nunca passa duas vezes na mesma linha	relacionarem matemática e atividades culturais	terem uma história associada	conterem conteúdos matemáticos estudados	relacionarem matemática e vida real
1.ª opção	8	6	5	2	1	1		
2.ª opção	5	3	5	2	2	1	2	3
3.ª opção	4	4	2	5	3	1	3	1

Figura 4.19. Caraterísticas dos *sona* mais apreciadas pelos alunos

Como se pode observar, o reconhecimento da originalidade dos desenhos é um dos aspetos que os alunos mais destacam. Segue-se na hierarquização realizada, o facto de a maioria dos desenhos serem desenhados sem levantar o dedo, isto é, traçando uma só linha contínua. Já o terceiro aspeto mais destacado remete para o reconhecimento da presença de conteúdos da matemática escolar em desenhos produzidos por um povo com pouca (ou nenhuma) escolaridade. O quarto aspeto mais destacado está, de novo, relacionado com o processo de traçado dos *sona*, ou seja, os alunos valorizam também o facto de não se poder passar duas vezes sobre a mesma linha do desenho, apesar das linhas se poderem cruzar. É ainda de referir que alguns alunos (26%) consideraram que os *sona* relacionam a matemática com atividades culturais de um povo.

No que concerne à opinião sobre o grau de dificuldade das atividades realizadas, 15 alunos (65%) consideraram-nas difíceis, sendo de assinalar que dentro destes há uma ligeira prevalência da resposta afirmativa no grupo das raparigas (figura 4.20).

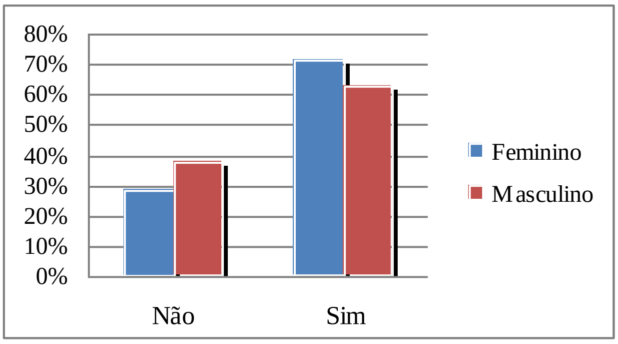
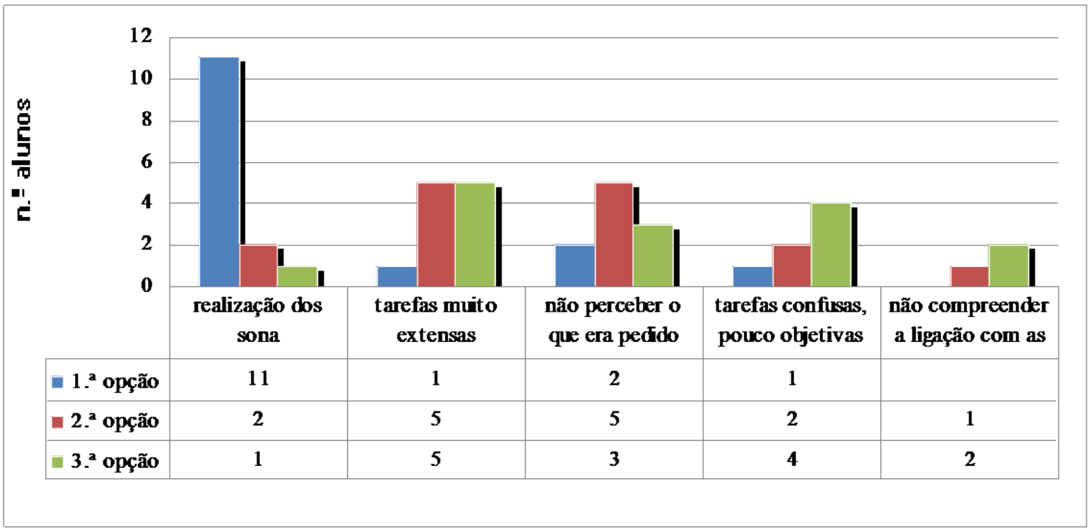


Figura 4.20. Distribuição das opiniões sobre a dificuldade das atividades realizadas por género.

Inquiridos sobre as principais dificuldades sentidas ao realizar as atividades, os dados obtidos e sintetizados na figura 4.21 permitem destacar que o processo de execução dos desenhos foi a caraterística considerada como mais difícil pelos 15 alunos que responderam a esta questão (note-se que só um não assinalou este aspeto). A extensão das tarefas e as dificuldades em interpretar os enunciados foram outros dos aspetos identificados como difíceis. É ressaltar que três alunos (20%) referem não compreender a ligação das tarefas propostas com as matérias a aprender.



	realização dos sona	tarefas muito extensas	não perceber o que era pedido	tarefas confusas, pouco objetivas	não compreender a ligação com as
1.ª opção	11	1	2	1	
2.ª opção	2	5	5	2	1
3.ª opção	1	5	3	4	2

Figura 4.21. Hierarquização por ordem crescente das principais dificuldades sentidas pelos alunos na realização das tarefas propostas.

Sobre as atividades realizadas, refira-se ainda que 19 alunos dos 23 inquiridos (82,6%) admitiram que a realização de atividades com desenhos *sona* tornaram mais fácil aprender a matéria e 20 desses alunos (87%) referem que estas os ajudaram a compreender o tema em estudo (figura 4.22). Podemos, por isso, inferir que para estes alunos não foi difícil estabelecer ligações com a matéria aprender.

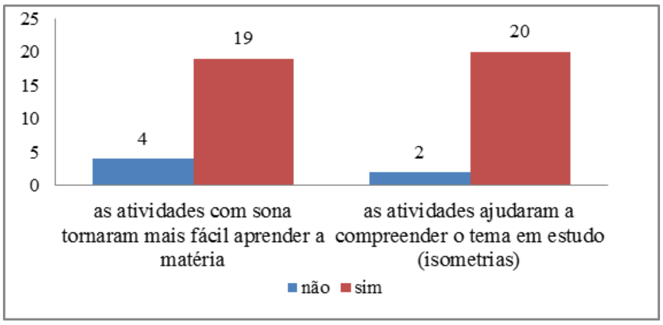


Figura 4.22. Ligações entre as atividades e a matéria a aprender

Os alunos foram ainda questionados sobre se as atividades realizadas facilitaram a participação nas aulas, tendo sido quase unanime uma resposta afirmativa, bem evidenciada na figura 4.23.

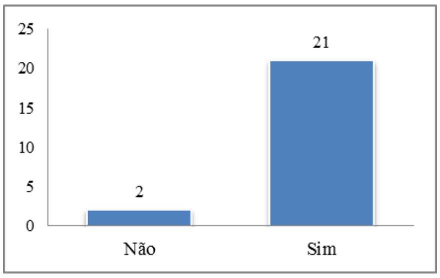


Figura 4.23. Contributo das atividades para a participação nas aulas

Relativamente às perguntas incidindo sobre o contributo da integração dos *sona* nas tarefas propostas para a motivação para a aprendizagem, a totalidade dos alunos foram de opinião que as atividades com *sona* tornaram a matéria mais interessante, 87% admitiram que estas propiciaram uma maior atenção à aula, 95,7% consideraram que os *sona* os motivaram para a realização das tarefas propostas pela professora e 76,9% assumem que as atividades realizadas os motivaram para a aprendizagem (figura 4.24).

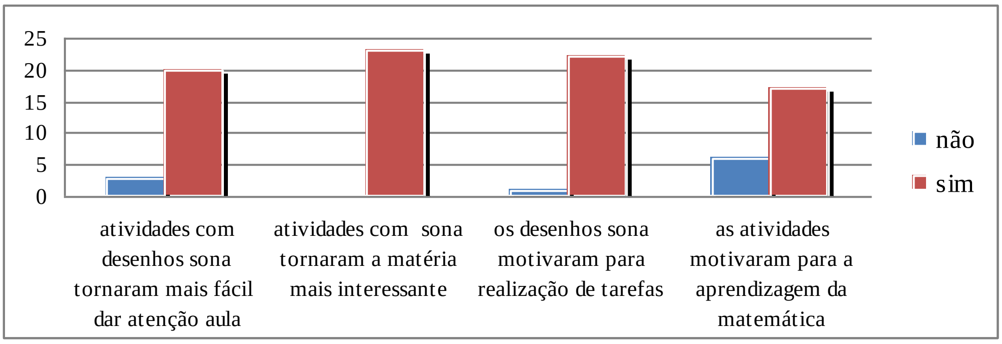


Figura 4.24: Contributo do recurso aos *sona* para a motivação para a aprendizagem

No questionário foram também incluídas duas questões recaindo sobre a repercussão das atividades nas aprendizagens dos conteúdos matemáticos trabalhados. As respostas obtidas mostram que para 82,6% dos alunos as atividades com desenhos *sona* tornaram mais fácil aprender a matéria, contra 8,7% que assumem que isso não aconteceu.

Para concluir a apresentação e análise dos dados recolhidos através de questionário, interessa destacar que nas questões envolvendo a apreciação da matemática e do seu papel social e cultural, todos os alunos afirmam que as atividades realizadas os ajudaram a dar importância à presença da matemática nas atividades culturais e que apenas um aluno assumiu que estas não o ajudaram a perceber que a matemática é praticada por diferentes povos, mesmo os não escolarizados.

Como já foi referido no capítulo da metodologia, decidiu-se aplicar um questionário constituído por questões de resposta aberta a alguns alunos da turma (anexo 21). O questionário era formado por 6 perguntas, com o objetivo de conhecer a opinião dos alunos relativamente à geometria *sona*, nomeadamente, ao nível da motivação para efetuar as tarefas propostas, da melhoria da opinião sobre a matemática, do seu contributo para ver o lado humano da matemática, perceber a presença da matemática na arte e nas manifestações culturais dos povos e finalmente na identificação das isometrias e simetrias no dia a dia, tendo-lhes sido solicitado a apresentação de alguns exemplos.

Analisando as respostas dadas à primeira questão "As atividades envolvendo desenhos *sona* incentivaram-te a efetuar as tarefas propostas pela docente? Porquê?" foi unânime a resposta afirmativa, tendo sido reconhecido interesse nas atividades, dado serem diferentes das atividades habitualmente realizadas.

Um dos alunos referiu que gostou pelo facto de ter que desenhar e ter experimentado atividades e tarefas novas, que desafiaram a sua criatividade.

> *Sim, porque gosto de desenhar e gosto de experimentar coisas novas e desafiar a minha criatividade (A22).*

Este é um aspeto particularmente interessante, pois mostra como a criatividade é um aspeto nem sempre trabalhado nas aulas de matemática e ao qual o aluno atribui muito valor.

Outro aluno, evidenciando uma conceção da matemática ligada ao cálculo, considerou positiva a ausência de cálculo.

> *Sim, porque incentivou os outros alunos a gostarem mais da aula de matemática, sem ser sempre a fazer contas, assim a aula vai sendo mais divertida (A23).*

Outro dos alunos inquiridos deu destaque à vertente cultural introduzida na aula através dos *sona*. Embora considerasse que os desenhos fossem difíceis de executar salientou que proporcionaram aulas diferentes.

> *Sim. Achei que esta atividade foi bastante interressante, permitindo que adquirissemos novos conhecimentos acerca deste povo [povo cokwe]. Estes desenhos foram difícéis de se fazer mas apesar disso foi algo diferente para uma aula de matemática* (*A13*).

Por último, um aluno, de nacionalidade angolana, referiu que embora não fosse grande apreciador dos desenhos *sona*, as atividades incentivaram-no a realizar as tarefas propostas pela docente.

> *Sim, embora não seja um grande apreciador dos desenhos sona, apesar de ser um dos desenhos do meus país* (A11).

As opiniões manisfestadas permitem destacar que as atividades propostas com recurso à geometria *sona*, incentivaram os alunos a realizar tarefas matemáticas, devido ao facto de terem sido aulas diferentes, contemplando atividades não rotineiras e que apelaram à criatividade.

Relativamente à segunda questão colocada, "Este tipo de atividades melhorou a tua opinião sobre a matemática? Porquê?", reproduzem-se de seguida algumas das respostas obtidas:

> *(Eu) antes pensava que a matemática era só quadro e caderno mas a aula de slides é fixe e muito interessante (*A11).
>
> *Mais ou menos. Nessa parte da matéria sim, noutro tipo já não tanto, eu sei que a matemática é importante. Acho que deviam fazer este tipo de atividade para todas as matérias relacionadas com a disciplina* (A24).
>
> *Acho que não. Eu já me interessava, por ser uma disciplina desafiante (A13).*

> *Sim, porque a matemática não é só números e além disso ficamos a saber mais sobre esses povos (A23).*

Depois de analisadas as respostas, inferimos que estes alunos valorizaram sobretudo a abordagem didática seguida pela docente, nomeadamente ao nível das estratégias didáticas, nas quais se destaca a introdução de uma vertente cultural no ensino da disciplina, e da dinâmica de sala de aula.

No que concerne à terceira questão, se este tipo de atividades contribui para ver o lado humano da matemática e porquê, estes responderam que a matemática não é só para génios e é praticada por todas as pessoas, mesmo as que têm menos escolaridade, tendo mesmo um aluno afirmado que existem povos que usam no seu dia a dia bastante conhecimentos matemáticos, mesmo que, por vezes, não tenham consciência disso.

Podemos confirmar nas respostas dadas pelos alunos que transcrevemos de seguida:

> *Sim, porque não é só os génios é que entendem de matemática mesmo aquelas pessoas sem escola entendem matemática só que não sabem* (A23).
>
> *Sim, porque se pensarmos, este povo não tem acesso à educação ou literacia e apesar disso e não tendo noção, fazem desenhos que contêm muita matemática* (A13).
>
> *Sim, porque nem todas as pessoas a sabem e há muitos povos/ civilizações que não tem muita escolarização e alguns criam matemática sem saberem* (*A24*).
>
> *Sim, porque a matemática não é só para génios, é para toda a gente* (*A22*).
>
> *A matemática é feita por todas as pessoas mesmo as que tem pouca escola* (*A11*).

Destas respostas, destaca-se a valorização da projeção de informação com recurso ao *Powerpoint* (reconhecida pelo aluno como inusual na aula de matemática), a consciencialização da presença de ideias matemáticas em artefatos culturais e de estes nem sempre serem concebidos por pessoas com escolarização em matemática.

Relativamente à questão quatro, na qual se inquiria os alunos sobre se as atividades os ajudaram a ver que a Matemática está presente na arte e na cultura dos povos e porquê, depois de analisadas as respostas concluímos que os alunos percebem que existe uma ligação entre a matemática, a arte e a cultura dos povos. Um aluno afirmou, que como sabe que a matemática está presente em todas as atividades, considera lógico que esteja presente na arte e na cultura dos povos, sendo um exemplo os desenhos *sona* praticados pelo povo *Cokwe*.

> *Sim, porque cada desenho sona está algum tipo de matemática e nesses povos não há muita escolaridade para fazerem tal coisa* (A22).
>
> *Sim, Há povos que não têm escolarização e mesmo assim criam coisas com matemáticas sem a saberem e dentro da sua cultura* (A24).
>
> *Sim, já tinha a noção que a matemática estava presente no nosso dia-a-dia, e é lógico que esteja presente na arte e na cultura dos povos (como os desenhos sona). Posso dizer que este povo conseguiu (apesar da falta de noção disso) e ultrapassou as barreiras do ensino (A13)*

Os desenhos sona têm muita matemática (A11).

Na quinta questão, pretendia-se saber se estas atividades os tinham ajudado a identificar isometrias e simetrias no dia a dia (na arte, na natureza, na arquitetura, etc.) e pedia-se para darem exemplos em que isso tenha sucedido (se a resposta fosse afirmativa). Pela análise das respostas, inferimos que os alunos inquiridos estão sensíveis à presença de isometrias em inúmeros aspetos da sua vida quotidiana.

Um exemplo de isometria é quando venho para a escola de autocarro. Nos animais, nos tapetes, no chão, nos azulejos, ... (A11)

Nos elevadores, na roupa, na cara, nos animais, nos tapetes, ... (A23)

Esta atividade ajudou-nos a relacionar a matemática com o dia a dia. Exemplos: a translação existente ao nosso redor (subir e descer de elevador), a deslocação de teleférico, etc... (A13).

Sim, muitas vezes vemos isometrias, simetrias no nosso dia a dia. Ex. Elevadores, rodas de carros, etc... (A24).

Sim, quando olhamos ao espelho. Quando entro no elevador. O moinho, o teleférico, na roupa, nas escadas rolantes,... (A22)

Relativamente à sexta questão em que se pedia aos alunos que apresentassem sugestões relativamente às estratégias didáticas e recursos utilizados, dois alunos manifestaram que deveria haver mais atividades deste tipo, tendo uma aluna referido que gostaria de ter mais aulas com recurso a *powerpoints*.

Criarem este tipo de atividades para toda a matéria da disciplina (A24)

Se as aulas forem dadas em powerpoints seriam melhores (A 13)

As restantes respostas estavam em branco, indicando que os alunos não tinham nada a apontar ou a melhorar, pois consideraram a sequência didática e a geometria *sona* interessante e motivadora, como foi confirmado quando questionados oralmente pela investigadora e docente, para confirmar o significado das respostas em branco.

Na nossa opinião e dos alunos, que se manifestaram verbalmente durante as aulas e depois destas, os *Powerpoints* continham imagens bastante apelativas, com cores e formatos agradáveis. Não é habitual na escola recorrer-se à projeção de informação através de diapositivos apresentados em *Powerpoint*. Dado o elevado nível de degradação física das salas da escola as salas têm, em nossa opinião, condições pouco favoráveis à projeção de diapositivos. De modo geral, estando as paredes bastante esburacadas é necessário fazer as projeções no teto.

4.1.3 Desempenho dos alunos nas tarefas propostas

Vamos analisar o desempenho dos alunos nas tarefas propostas ao longo da sequência didática de forma cronológica. Iniciaremos com análise das respostas do teste diagnóstico, seguida da análise dos desenhos *sona* na ficha de apoio “Geometria *sona*”, análise das respostas à ficha de tarefas

"Geometria *Sona*", análise das respostas do desafio "Tenta adivinhar… quem sou eu?", seguida da análise dos desenhos criados pelos alunos no desafio final, análise do teste de avaliação formativo e por fim a análise do teste de avaliação sumativo.

Análise das respostas do teste diagnóstico

O teste diagnóstico pretendia averiguar os conhecimentos que os alunos tinham sobre as diferentes transformações geométricas estudadas em anos letivos anteriores, a partir do 6.º ano de escolaridade e também sobre a rotação já abordada anteriormente no 9.º ano de escolaridade. O teste era constituido por três perguntas: identificação da rotação, da translação e da reflexão; identificação da translação, da reflexão, do vetor associado à translação e do eixo de simetria, e finalmente identificação das simetrias de reflexão.

Na primeira pergunta, identificação da translação, da rotação e da reflexão, constatamos que todos os alunos responderam à questão, mas só 62,5% identificaram corretamente as três transformações geométricas (figura 4.25), sendo a rotação a transformação mais corretamente identificada (87% dos alunos). Estes revelaram mais dificuldades na identificação da reflexão e da translação, provavelmente por esses conceitos estarem esquecidos pois já foram estudados em anos letivos anteriores (70% identificaram corretamente a reflexão e 65% na translação).

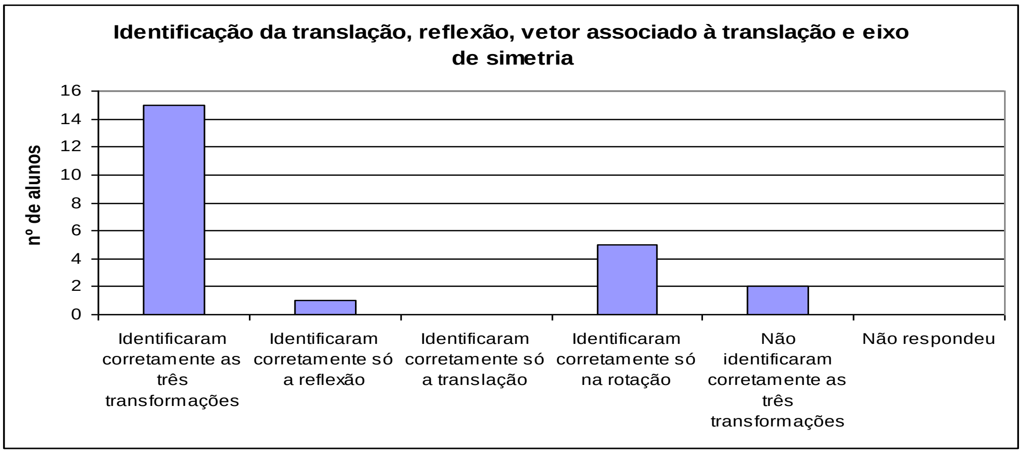


Figura 4.25. Identificação da reflexão, da translação e da rotação no teste diagnóstico

No que concerne à pergunta dois - identificação da translação, da reflexão, do vetor associado à translação e do eixo de simetria, verificamos que 41,7% dos alunos conseguiram identificar a translação, seguida da identificação da reflexão com 12,5% dos alunos e a mesma percentagem conseguiu desenhar os eixos de simetria. No entanto, os alunos revelaram dificuldades na identificação do vetor associado à translação e houve um aluno que não respondeu a esta pergunta (figura 4.26).

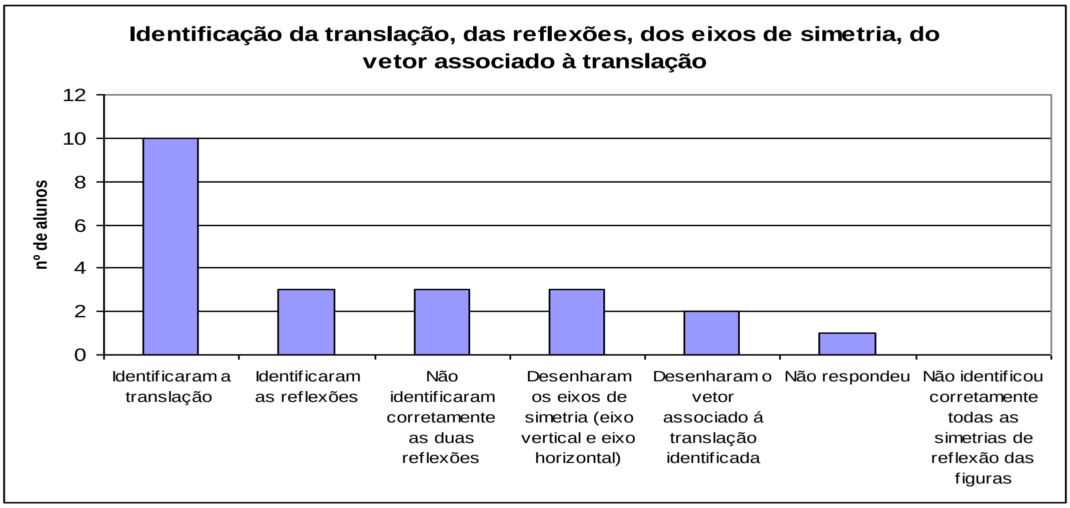


Figura 4.26. Identificação da translação, do vetor associado à translação, da reflexão e eixos de simetria no teste diagnóstico

Relativamente à última questão, cujo objetivo era identificar a presença de simetrias de reflexão nas figuras dadas, constatamos que 45,8% identificou as simetrias de reflexão em duas das figuras, seguido de 25,0% em três figuras dadas e 4,2% identificou todas as simetrias de reflexão nas figuras apresentadas. Apenas um aluno não respondeu à questão, inferindo-se que este conceito estava esquecido ou que não foi devidamente compreendido e assimilado (figura 4.27).

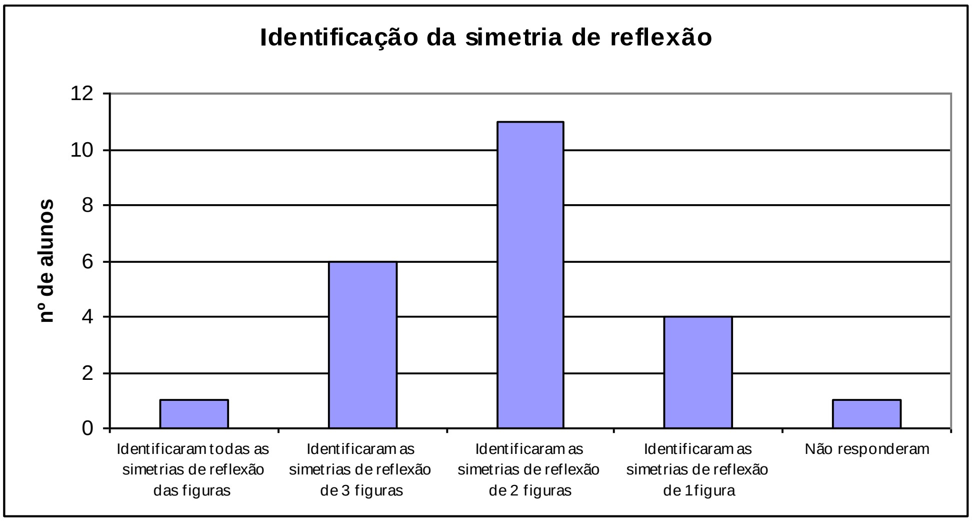


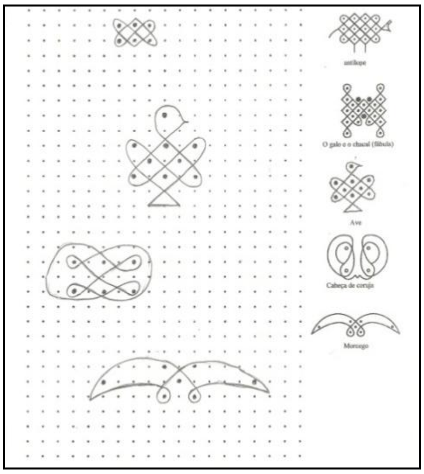
Figura 4.27. Identificação das simetrias de reflexão no teste diagnóstico

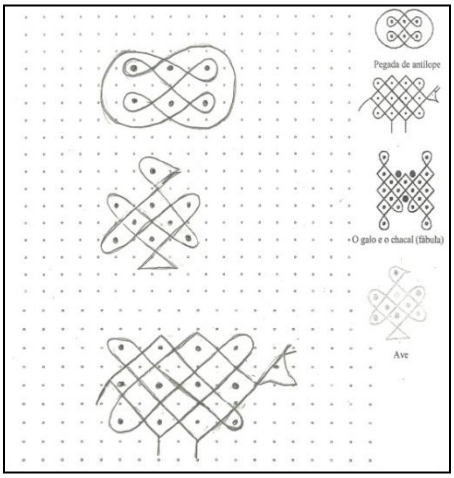
Apesar de um grande percentagem dos alunos ter conseguido identificar as simetrias de reflexão nas figuras dadas, considerámos que este conceito ainda não foi totalmente entendido, o que nos levou a relembrá-lo e a explicá-lo de novo, para que os alunos o pudessem compreender melhor.

Análise dos desenhos *sona* na ficha de apoio "Geometria *Sona*"

Depois da apresentação da geometria *sona*, os alunos foram convidados a desenhar alguns *sona*, com a mesma técnica usada pelo povo *Cokwe*. Avaliámos os produtos finais da atividade dos alunos pelo seu rigor e respeito pelas regras do povo *Cokwe*, persistência demonstrada, autonomia a realizar esta tarefa, número de desenhos *sona* realizados, motivação na sua realização, etc.. Para tal construímos uma grelha de observação que foi preenchida logo após o término da aula.

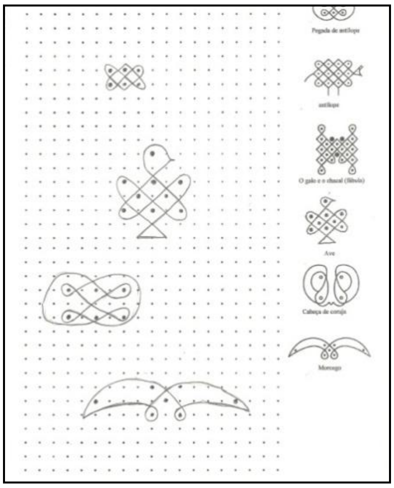
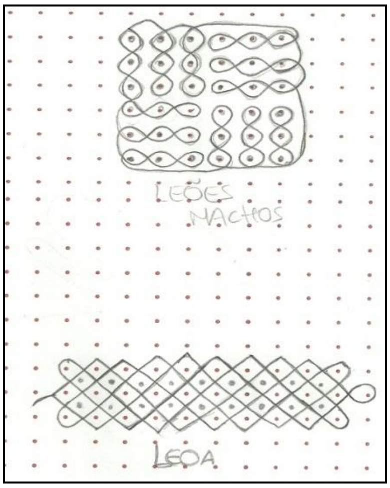
Apesar da ficha de trabalho incluir alguns *sona*, sugeria-se aos alunos que, se o desejassem, podiam desenhar *sona* que foram exibidos durante a apresentação do *Powerpoint* "Geometria *Sona*" e que continuavam projetados na teto da sala de aula (não se pretendeu limitar a execução dos *sona* apenas aos que constavam na ficha de apoio, deixando que os alunos desenhassem os *sona* que quisessem e de acordo com as suas preferências e gostos). Esta tarefa foi acolhida com bastante entusiasmo e interesse pelos alunos, tendo sido o desempenho bastante satisfatório, quer no respeito pelas regras de execução e rigor do desenho, quer pela autonomia, entusiasmo e interesse evidenciado durante a realização de toda a atividade. Reproduzimos nas figuras 4.28 a 4.31 as produções de quatro alunos, sendo, oportuno referir que em notas de campo a docente - investigadora registou que *foi sempre elogiando os desenhos e não teve necessidade de ajudar nos desenhos e nem a sua técnica de execução. Os alunos esforçaram por desenhar os desenhos com a técnica usada pelo povo, com rigor, beleza e perfeição e alguns disseram que não era fácil* (N.C., 1.ª sessão).





Figuras 4.28 e 4.29. Desenhos *sona* produzidos pelos alunos A22 e A15 na ficha de apoio "Geometria *Sona*"

Dos desenhos produzidos pelos alunos destaca-se o realizado pelo aluno A1, pois este esboçou o *sona* "leoa", bastante complexo para uma primeira produção, de forma completamente autónoma, com bastante rigor e qualidade estética.

Figuras 4.30 e 4.31. Desenhos *sona* produzidos pelos alunos A24 e A1 na ficha de apoio “Geometria *Sona*”

Terminada a tarefa, questionámos verbalmente os alunos sobre qual a relação dos desenhos *sona* com a matemática. Um número reduzido de alunos não conseguiu, de início e de imediato, estabelecer a ligação dos desenhos *sona* com os conteúdos matemáticos pretendidos. Houve, inclusive, um aluno (A25) que comentou que as aulas de matemática pareciam aulas de Educação Visual. Contudo, outros alunos conseguiram, sem o auxílio da docente, estabelecer a ligação dos *sona* aos conceitos matemáticos pretendidos, conforme é ilustrado pelas notas de campo, tomadas após o término da 1.ª sessão: *O aluno A5 referiu em voz alta que conseguia ver e identificar simetrias nos desenhos sona, tendo logo um outro aluno, A26, que apresenta muitas dificuldades a Matemática, comentado que não percebia o que aqueles desenhos tinham a ver com Matemática, pelo que a docente respondeu que na aula seguinte iria ver e compreender e vislumbrar a matemática escondida nos desenhos sona. Houve outra aluna, A25, que referiu de imediato que via translações, rotações e reflexões nos desenhos sona, relacionando a matéria do teste diagnóstico com os desenhos sona, pelo que foi logo elogiada pela docente* (N.C., 1.ª sessão*).*

Os alunos que, inicialmente, não estabeleceram a ligação entre os desenhos *sona* e os conteúdos matemáticos, foram progressivamente e de forma autónoma percebendo a sua ligação, ao longo da execução das tarefas propostas. O facto de termos adiado dar resposta ao aluno A25, que no início da sequência didática, não conseguiu estabelecer a ligação dos *sona* aos conteúdos matemáticos que iriam ser lecionados foi fruto de ponderação, pois consideramos que deve ser o próprio aluno a tentar descobrir essa ligação com as ferramentas mentais e matemáticas que possui, mesmo que demore mais algum tempo. Se o professor fornece de imediato a resposta ao aluno, este não sente necessidade de se esforçar e as tarefas deixam de constituir um desafio para o aluno. Consideramos que deve ser este a procurar as respostas e o facto de o conseguir contribui para a autoestima e para o aumento da confiança em si mesmo, desenvolvendo atitudes positivas em relação à matemática, como se pretende. Mas de facto, a maioria dos alunos conseguiu ver a ligação dos *sona* com os conteúdos matemáticos, visualizando, de forma mental, rotações, translações, reflexões e simetria axial.

Análise das respostas às tarefas da ficha das tarefas "Geometria *Sona*"

Relativamente à atividade desenvolvida pelos alunos nas tarefas 1 a 4.2 propostas pela docente, elaborámos um gráfico (figura 4.32) que nos permite ter uma boa visão do grau de consecução das mesmas.

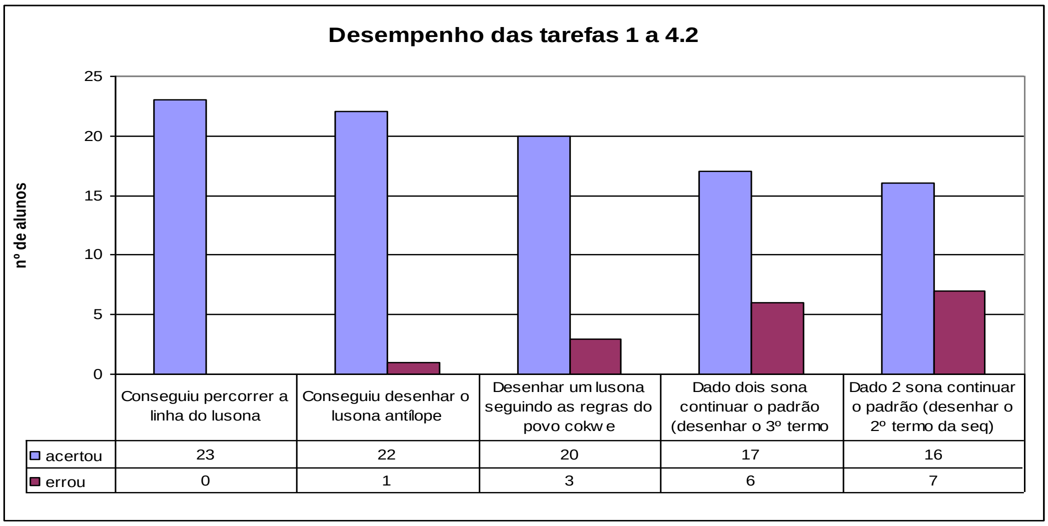


Figura 4.32. Desempenho das tarefas 1 a 4.2 da ficha de tarefas "Geometria *Sona*"

Cerca de 70% dos alunos conseguiram executar de forma correta todas as tarefas propostas, tendo mesmo 100% dos alunos conseguido percorrer a linha do *sona* dado, 96% dos alunos conseguiram desenhar o *lusona* antílope, 83% desenhou um *lusona* seguindo as regras do povo, 71% conseguiu continuar o padrão dos dois *sona* (desenhar o terceiro termo) dados e 67% continuou o padrão dados dois *sona* (desenhar o 2.º termo da sequência), constatando que o desempenho destas tarefas foi muito satisfatório.

No que concerne ao desempenho nas tarefas 6.1 e 6.2 - identificação do motivo, da transformação associada (translação) e caraterização do vetor associado à translação- da ficha de tarefas, verificamos que 96% dos alunos identificaram o motivo principal de cada friso, assim como identificaram a transformação associada e 83% conseguiram identificar o vetor associado à translação. Constatamos que a translação foi devidamente assimilada, inferindo-se que um número muito reduzido dos alunos ainda sente dificuldade em identificar o vetor associado à translação. No entanto, o desempenho dos alunos foi muito satisfatório (figura 4.33).

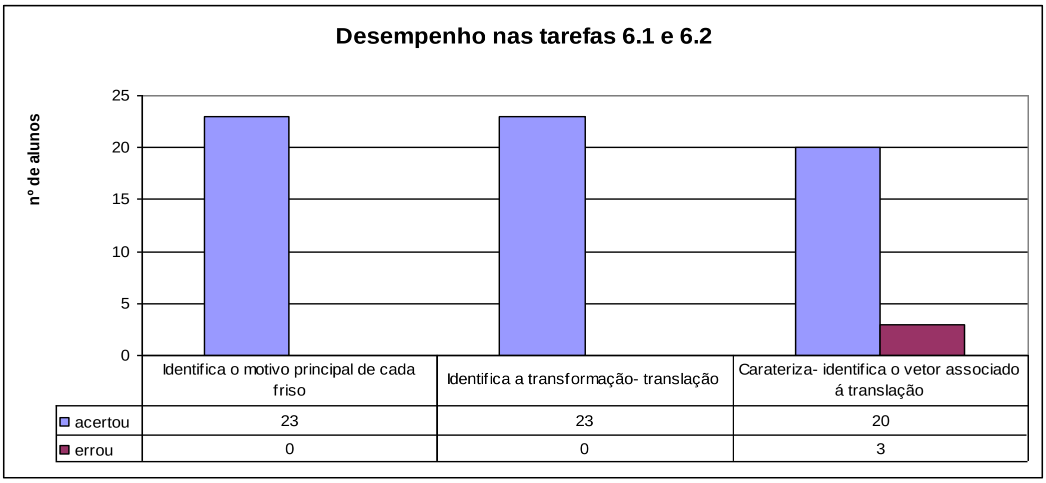


Figura 4.33. Desempenho das tarefas 6.1 e 6.2 da ficha de tarefas "Geometria *Sona*"- identificação da translação e do vetor associado à translação

Quanto ao desempenho das tarefas 7.1 e 7.2 - identificação da isometria associada ao desenho *sona*, verificamos que a rotação foi a isometria mais corretamente identificada, com 83% dos alunos, seguida da translação com 75% de respostas corretas e da reflexão com 71%. Seguiu-se a reflexão deslizante (62,5%) e 58% dos alunos identificaram o *sona* que não continha nenhuma isometria. Verificamos que a reflexão deslizante é a isometria onde os alunos revelam maior dificuldade, embora o desempenho dos alunos tenha sido bastante satisfatório, dado que as outras três isometrias foram compreendidas na medida em que os alunos não manifestaram dificuldades na sua identificação (figura 4.34).

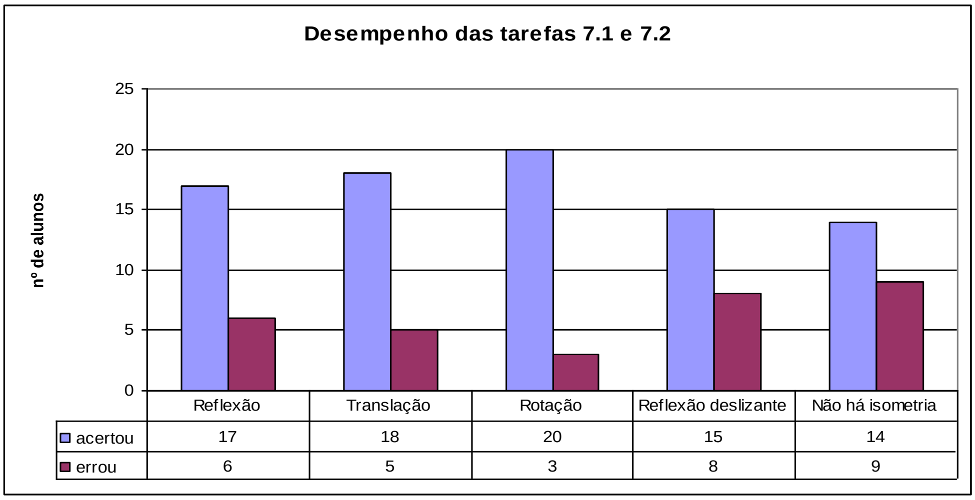


Figura 4.34. Desempenho das tarefas 7.1 e 7.2 da ficha de tarefas "Geometria *Sona*"- identificação da isometria

No que diz respeito ao desempenho da tarefa 8 - identificação do motivo principal, caraterização da rotação e indicar o número de vezes que foi aplicada, registamos que 83% dos alunos identificaram o motivo principal do *sona*, caraterizaram corretamente a isometria associada, assim como o número de vezes que foi aplicada. O desempenho dos alunos relativamente à simetria de rotação foi bastante satisfatória, inferindo que os alunos compreenderam a simetria rotacional (figura 4.35).

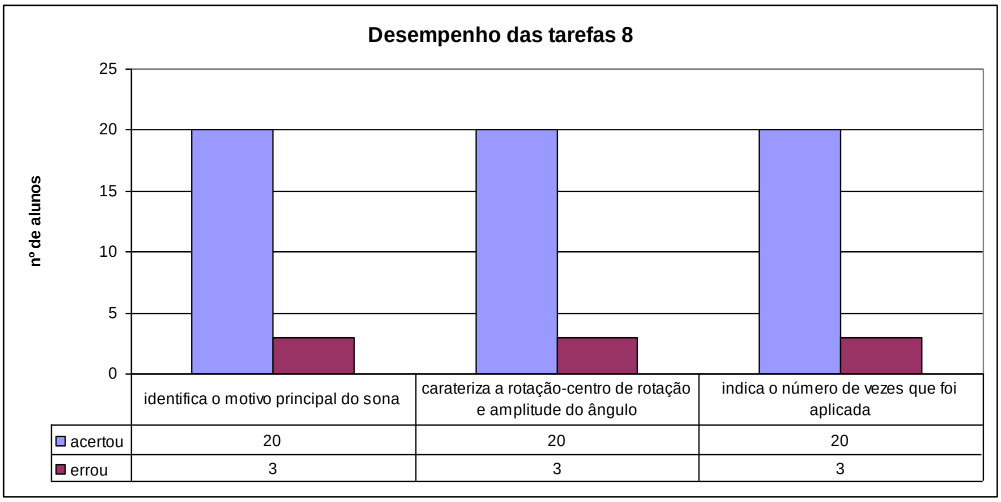


Figura 4.35. Desempenho da tarefa 8 da ficha de tarefas “Geometria *Sona*”- identificação da simetria de rotação

Relativamente ao desempenho da tarefa 9, identificação da simetria de reflexão e de rotação, temos que 83% ou mais dos alunos conseguiram identificar as simetrias de reflexão e de rotação nos *sona* dados, inferindo, assim que estes conceitos foram compreendidos e assimilados pelos alunos (figura 4.36). Contudo, verificamos que a identificação do centro de rotação e da amplitude do ângulo de rotação não foi completamente compreendido.

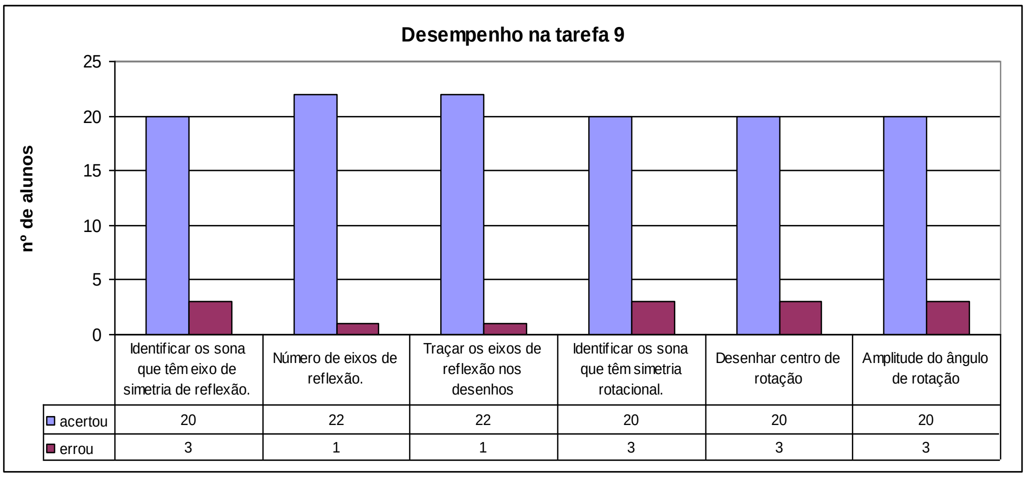


Figura 4.36. Desempenho da tarefa 9 da ficha de tarefas “Geometria *Sona*”- identificação da simetria de rotação e de reflexão

Os alunos empenharam-se na resolução das tarefas, muitas vezes trabalhando com o colega que se encontrava sentado ao seu lado, ou em pequenos grupos, confirmando uns com os outros as suas respostas e resoluções. A dependência da ajuda da docente foi diminuindo ao longo da resolução da ficha de tarefas, tendo os alunos mostrado interesse, empenho, iniciativa e uma crescente autonomia, com exceção de um aluno, que se encontra completamente desmotivado para a escola.

Análise às respostas do desafio "Tenta adivinhar… Quem sou eu?"

Relativamente à primeira pergunta, esta era constituído por quatro alíneas. Eram exibidos vários *sona* e na primeira alínea em que se pedia aos alunos que identificassem os *sona* com um eixo de reflexão vertical, registamos que 12 dos alunos (52,2%) o fez corretamente. Na segunda alínea, em que era pedida a identificação dos *sona* com um eixo de reflexão horizontal, assinalamos que 13 alunos (56,5%) acertaram plenamente na resposta. Na terceira alínea em que se pretendia que os alunos identificassem os *sona* com um eixo de simetria vertical e um eixo de simetria horizontal, só 11 alunos (47,8%) responderam de forma correta. Por fim, em relação à quarta alínea que remetia para a identificação dos *sona* que não têm eixo de reflexão, registamos que 15 alunos (65,2%) responderam acertadamente.

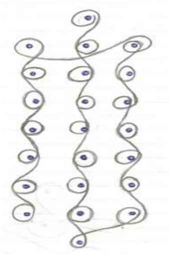
No que concerne à segunda questão, na primeira alínea, pedia-se para identificar o motivo principal do desenho *sona* dado, caraterizar a isometria e indicar o número de vezes em que foi aplicada para se obter o desenho final, todos os alunos conseguiram identificar o motivo principal, contudo, apenas, 13 dos alunos (conseguiram caraterizar corretamente a isometria e indicar de forma correta o número de vezes em que foi aplicada. Na segunda alínea – pedia-se ao aluno para identificar o que tinham em comum dois *sona*, pretendendo-se que o aluno respondesse que os dois *sona* apresentavam simetria de reflexão e não tinham simetria de rotação, tendo 52,1% dos alunos acertado. Na terceira alínea, pedia-se para dizer o que tinham em comum dois *sona*, nomeadamente que estes *sona* não continham simetria de reflexão e nem de rotação e 56,5% dos alunos acertou na resposta.

Análise dos desenhos *sona* criados pelos alunos na Tarefa –Desafio final

Nesta tarefa pretendia-se que os alunos criassem um ou mais desenhos *sona* obedecendo a quatro critérios: não levantar o lápis ou caneta no traçado dos *sona*, não passar duas vezes pela mesma linha; conter pelo menos uma isometria e ser original. Foram, igualmente, apresentados os critérios de avaliação e o prazo de entrega dos desenhos produzidos. O desafio foi muito bem aceite pelos alunos, tendo todos eles começado a responder ao desafio na própria aula, apesar de a docente ter indicado que o realizassem em casa. Muitos dos alunos participaram, efetivamente, embora nem todos os desenhos obedecessem aos critérios definidos. Por outro lado, houve alguns alunos que apresentaram mais do que um desenho *sona* que obedecia a todos os critérios sugeridos. Apresentamos e analisamos, de seguida, alguns dos desenhos elaborados pelos alunos. Consideramos que o facto de, nessa semana, os alunos estarem envolvidos em atividades de avaliação (testes intermédios e testes de avaliação sumativo) de várias disciplinas poderá ter interferido no número de desenhos realizados e o rigor do traçado dos mesmos, pois alguns alunos não aperfeiçoaram o primeiro desenho que já tinham realizado em sala de aula no dia de apresentação do desafio.

Como já referido, os *sona* deveriam conter pelo menos uma isometria. Os desenhos produzidos foram muito diversificados e, de um modo geral, originais. Porém, nem sempre o traçado foi muito rigoroso. De facto, em certos desenhos, em que se torna bem visível a ideia de existência de alguma isometria, quando se observa com atenção constata-se que a isometria não foi expressa com o rigor desejado. Acresce registar que alguns dos desenhos não contêm qualquer isometria.

Nas figuras 4.37 e 4.38 apresentam-se alguns dos desenhos produzidos pelos alunos e aos quais não está associada qualquer isometria.



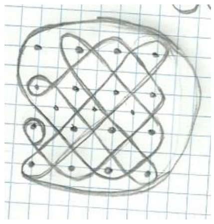
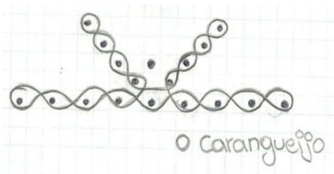
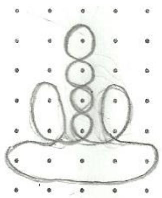
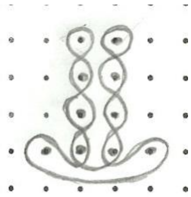


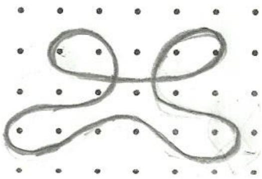
Figura 4.37 e 4.38. Desenhos assimetricos produzidos pelos alunos A8 e A 22, respetivamente

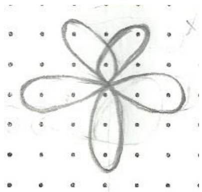
Alguns dos desenhos apresentaram apenas simetria de reflexão, tal como é ilustrado pelas quatro produções reproduzidas nas figuras 4.39 a 4.44. É de notar que no primeiro desses desenhos, o aluno deu um título ao *sona*, o que traduz a interiorização de que estes desenhos estão tradicionalmente associadas a histórias, a fábulas, a lendas, a animais, etc.





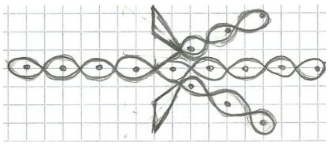
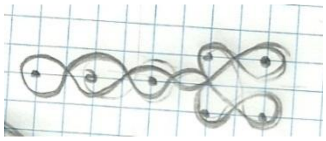






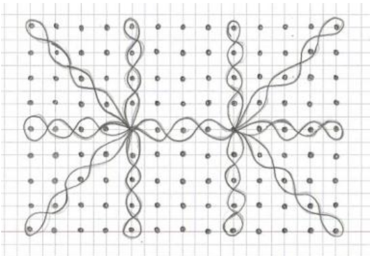
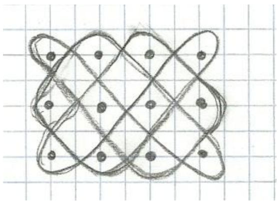
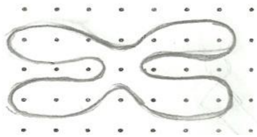
Figuras 4.39 a 4.44. Desenhos com simetria de reflexão vertical produzidos pelos alunos A8, A22, A21, A27 e A9 respetivamente

No próximo conjunto de figuras (figuras 4.45 a 4.47) todos os desenhos apresentam apenas simetria axial de eixo horizontal, ficando pois invariantes por meio de uma reflexão de eixo horizontal.

Figuras 4.45 a 4.47. Desenhos com reflexão de eixo horizontal produzidos pelos alunos A8, A19, A22 respetivamente

Encontram-se também entre as produções dos alunos, desenhos que ficam invariantes mediante uma reflexão de eixo vertical e uma reflexão de eixo horizontal e, portanto, também invariantes por meio de uma rotação com centro na interseção dos eixos e de amplitude 180º (e obviamente na rotação com o mesmo centro e amplitude 360º). Nas figuras 4.48 a 4.50 reproduzimos os desenhos com essas características.

Figuras 4.48 a 4.50. Desenhos com reflexão de eixo vertical, reflexão de eixo horizontal e rotação de 180º (meia volta) e 360º, produzidos pelos alunos A8, A15 e A21 respetivamente

Por fim, há que destacar a existência de dois desenhos com quatro reflexões (eixo vertical, eixo horizontal e dois eixos oblíquos) e quatro simetrias de rotação: 90.º, 180.º, 270.º e 360.º, que reproduzimos nas figuras 4.51 e 4.52.

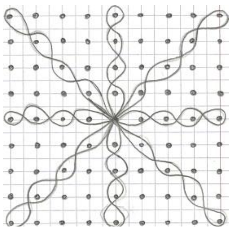
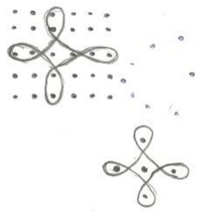



Figura 4.51 e 4.52: Desenho com quatro reflexões (eixo vertical, eixo horizontal e dois eixos oblíquos) e quatro simetrias de rotação: 90.º, 180.º, 270.º e 360.º, produzidos pelos alunos A8 e A9

Em notas de campo registámos que a maioria dos alunos que realizou esta atividade na aula, não revelou a preocupação de dar resposta à exigência de o mesmo conter, pelo menos, uma isometria, deixando-se levar mais pelo lado estético e criativo. No entanto, verificou-se que alguns alunos, apesar de terem iniciado os desenhos na própria aula, acabaram os mesmos em casa, criando desenhos que contemplavam e obedeciam aos quatro critérios de avaliação, sendo estes de maior beleza e complexidade como é o caso do desenho reproduzido na figura 4.46 e que o aluno entregou na aula seguinte de Formação Cívica.

O aluno A8, que desde o início do ano apresentava sinais de grande desmotivação escolar, incluindo nas aulas da disciplina de matemática, evidenciou na atividade desenvolvida uma grande aptidão para desenhar, sendo de frisar o empenho, o rigor e a beleza dos vários *sona* que apresentou. Além disso, teve o cuidado de respeitar o critério da isometria, tendo demonstrado um desempenho superior aos restantes alunos.

Análise das respostas ao teste de avaliação formativo

Relativamente ao teste de avaliação formativo, optou-se por fazer uma análise descritiva e interpretativa por questão e/ou grupo de questões. O teste incluía um conjunto de questões envolvendo as quatro isometrias estudadas – translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. Para cada um dos tipos de isometrias, o teste incluía um conjunto de afirmações centradas nas propriedades de cada uma dessas isometrias, tendo os alunos de assinalar para cada uma delas a sua veracidade ou falsidade.

Relativamente às propriedades da reflexão, as respostas obtidas encontram-se sintetizadas na figura 4.53. Pode-se observar que mais de 80% dos alunos assimilaram as propriedades da reflexão, tendo todos os alunos percebido que a distância da imagem ao eixo é igual à distância objeto ao mesmo eixo e que há preservação do sentido dos ângulos da figura original e da sua transformada. A afirmação "a imagem de um segmento de reta é um segmento de reta paralelo ao inicial" não foi bem assimilado pois a percentagem de alunos que acertou na resposta, que neste caso, significava assinalar a opção "Falso", foi de apenas 4%, inferindo-se que os alunos apenas terão considerado exemplos de segmentos de reta paralelos ao eixo de simetria (a afirmação de facto é verdadeira nos casos em que o segmento de reta é paralelo ao eixo de simetria, mas no caso de o segmento de reta ser obliquo ao eixo de simetria obteremos um segmento de reta que não vai ser paralelo ao segmento inicial).

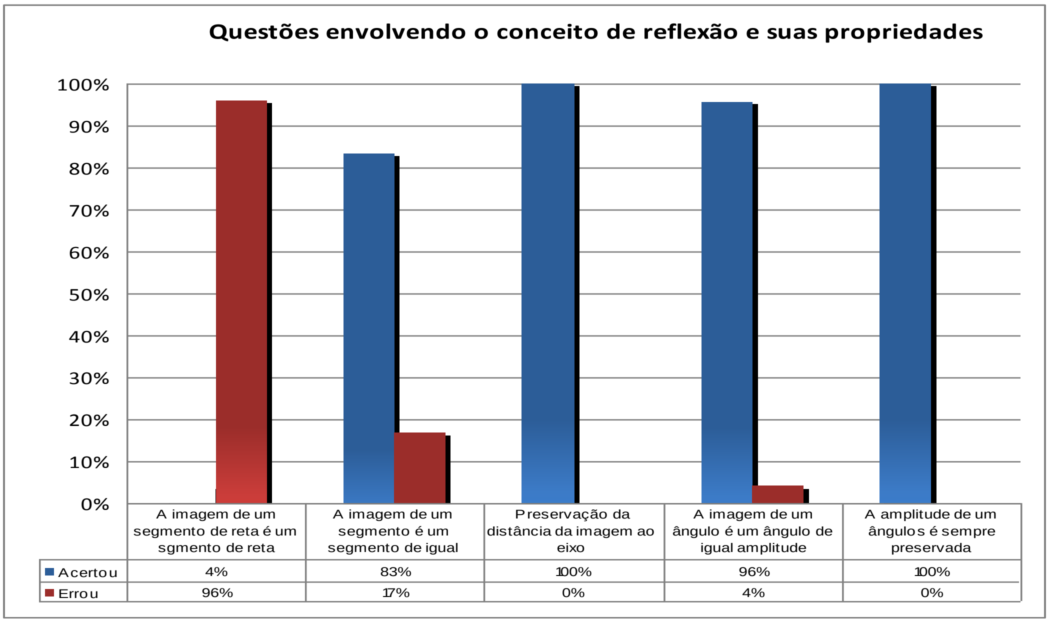


Figura 4.53: Reconhecimento das propriedades da reflexão (teste de avaliação formativo)

Relativamente às propriedades da rotação, as respostas obtidas encontram-se sintetizadas na figura 4.54. Podemos observar que a maioria dos alunos compreendeu as propriedades da rotação, tendo todos assimilado que a rotação não preserva o paralelismo entre os lados da figura original e da sua transformada mas, que, no entanto, a amplitude dos ângulos é preservada.

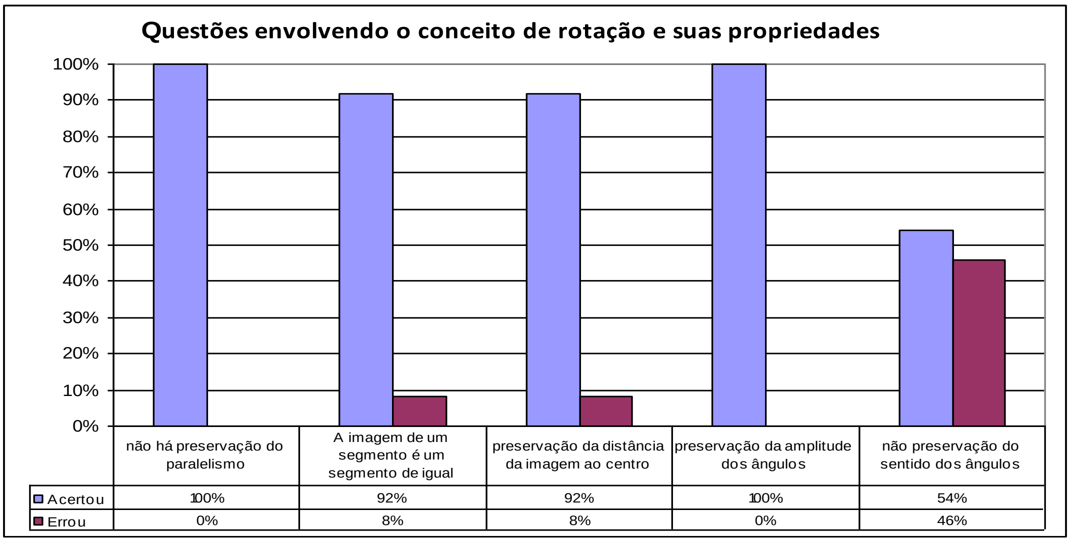


Figura 5.54. Reconhecimento das propriedades da rotação (teste formativo)

Relativamente às propriedades da translação, as respostas obtidas encontram-se sintetizadas na figura 4.55. Podemos observar que mais de 80% dos alunos assinalaram corretamente as propriedades da translação.

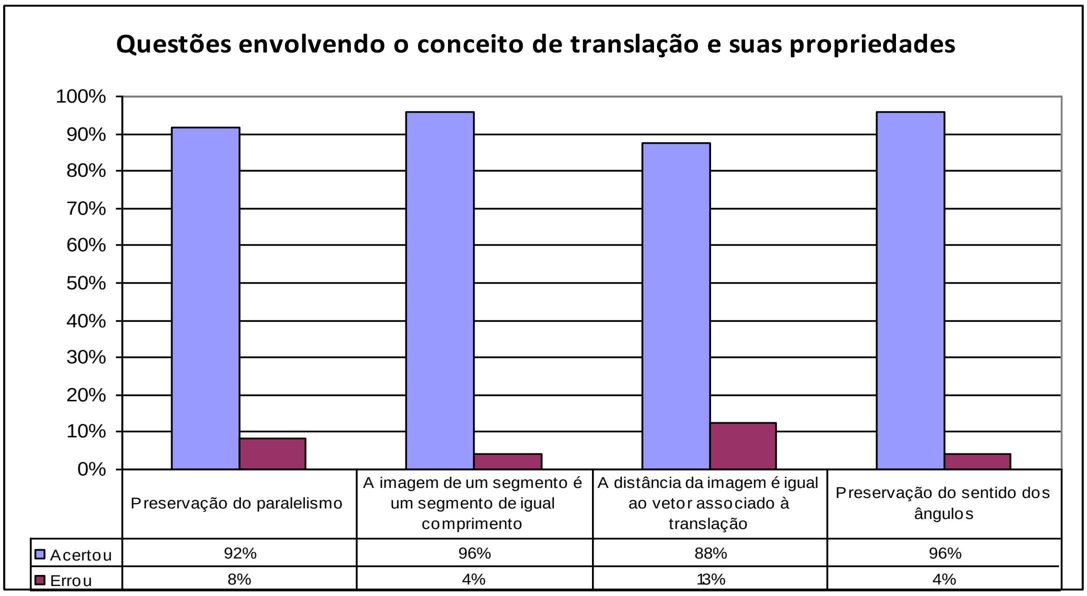


Figura 4.55: Reconhecimento das propriedades da translação (teste formativo)

Relativamente às propriedades da reflexão deslizante, as respostas obtidas encontram-se sintetizadas na figura 4.56. Podemos observar que os alunos tiveram dificuldade em compreender as propriedades da reflexão deslizante, inferindo-se que este conceito não foi bem assimilado e compreendido pois esta transformação resulta da composição de duas transformações, sendo o seu grau de dificuldade e de execução maior do que as restantes isometrias. No entanto, quase 90% dos alunos conseguiu reconhecer que a reflexão deslizante preserva o paralelismo dos segmentos de reta e que a imagem de um segmento de reta é um segmento de reta de igual comprimento. Quanto às restantes propriedades verificou-se alguma dificuldade, nomeadamente que a distância da imagem não é a mesma que a figura inicial ao vetor e que não há preservação do sentido dos ângulos.

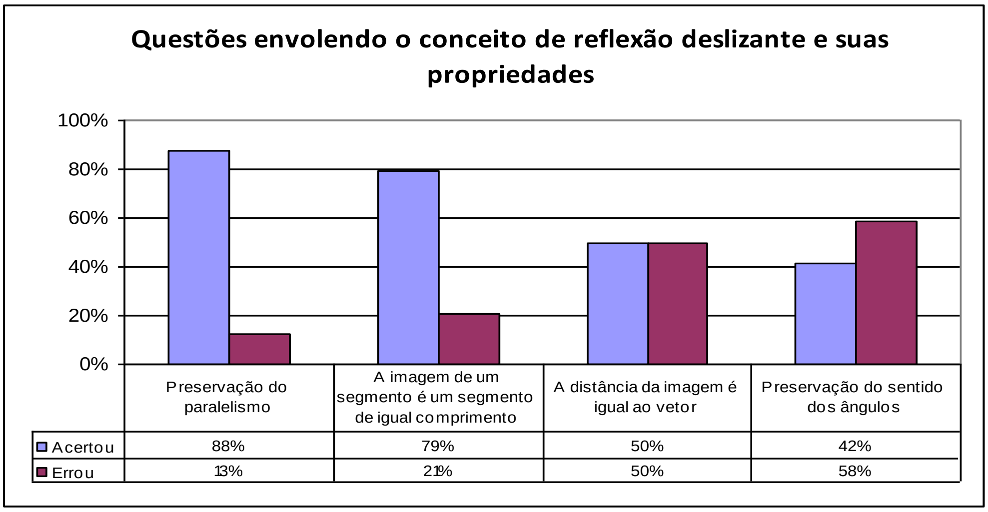
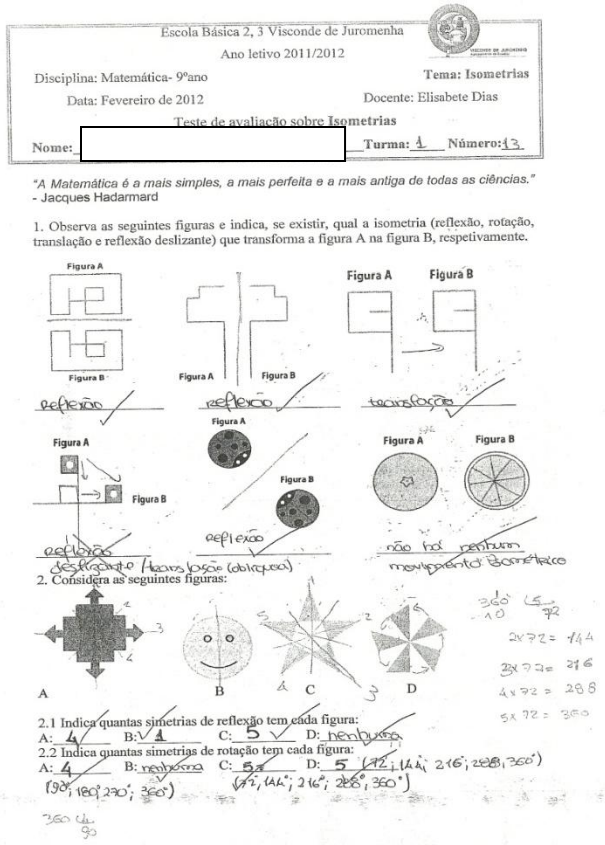


Figura 4.56. Reflexão e suas propriedades no teste de avaliação formativo

Relativamente à questão dois, onde se pede a identificação do número de simetrias de reflexão e de rotação das figuras dadas, apesar de não se ter pedido explicitamente aos alunos que indicassem o eixo de reflexão, muitas das respostas (de que são exemplo as respostas do aluno A13, reproduzidas na figura 4.57) evidenciaram o traçado desses eixos, em conformidade com o procedimento seguido nas aulas. Outros alunos responderam corretamente sem ter traçado o eixo de reflexão, como se pode comprovar na figura 4.58.


Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha

Ano letivo 2011/2012

Disciplina: Matemática- 9ºano — Tema: Isometrias

Data: Fevereiro de 2012 — Docente: Elisabete Dias

Teste de avaliação sobre Isometrias

Nome: [redacted] Turma: 1 Número: 13

"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."
- Jacques Hadarmard

1. Observa as seguintes figuras e indica, se existir, qual a isometria (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante) que transforma a figura A na figura B, respetivamente.

2. Considera as seguintes figuras:

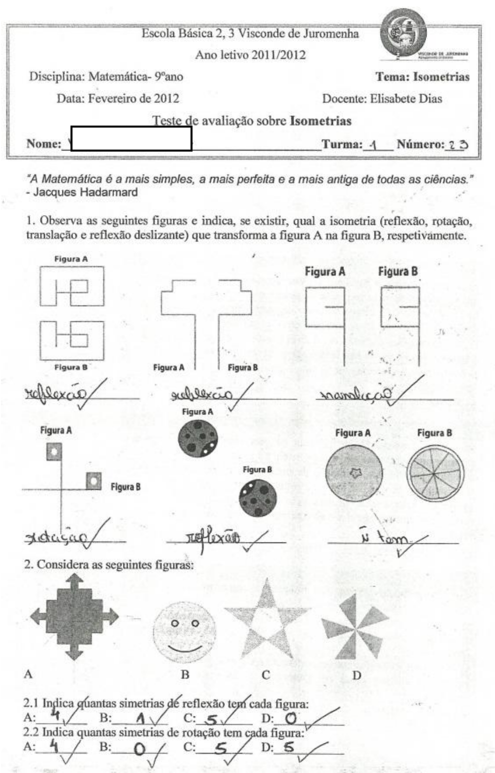
2.1 Indica quantas simetrias de reflexão tem cada figura:

A: 4 B: 1 C: 5 D: nenhuma

2.2 Indica quantas simetrias de rotação tem cada figura:

A: 4 (90°; 180°; 270°; 360°) B: nenhuma C: 5 (72°, 144°; 216°; 288°, 360°) D: 5 (72; 144; 216; 288, 360°)

Figura 4.57. Produção de A13 no teste de avaliação formativo


Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha

Ano letivo 2011/2012

Disciplina: Matemática- 9ºano Tema: Isometrias

Data: Fevereiro de 2012 Docente: Elisabete Dias

Teste de avaliação sobre **Isometrias**

Nome: [redacted] **Turma:** 1 **Número:** 23

"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."
- Jacques Hadarmard

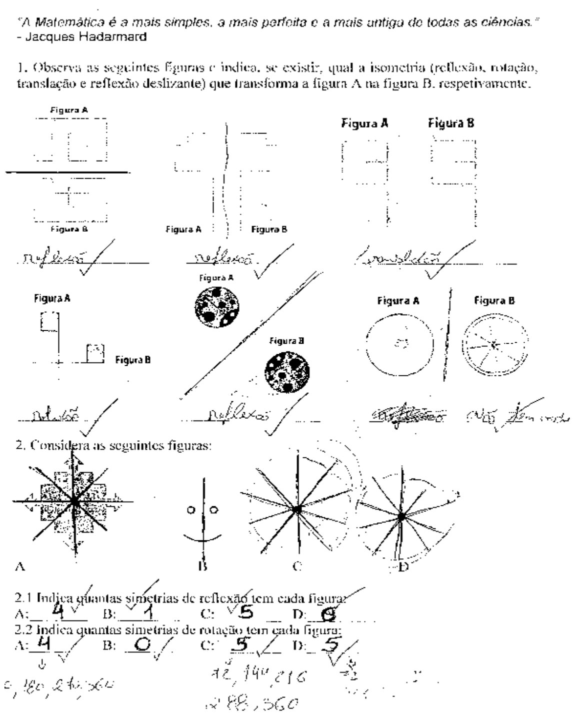
1. Observa as seguintes figuras e indica, se existir, qual a isometria (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante) que transforma a figura A na figura B, respetivamente.

2. Considera as seguintes figuras:

2.1 Indica quantas simetrias de reflexão tem cada figura:
A: 4 B: 1 C: 5 D: 0
2.2 Indica quantas simetrias de rotação tem cada figura:
A: 4 B: 0 C: 5 D: 5

Figura 4.58. Produção de A23 no teste de avaliação formativo

Reforçamos que houve outros alunos, à semelhança da aluna A13 (figura 4.59 e figura 4.60), que para além de terem traçado os eixos de reflexão e de rotação nas figuras, identificaram o centro de rotação e as amplitudes da simetria de rotação presentes nas figuras, envidenciando que o conceito de simetrias axial e rotacional foram completamente assimilados.



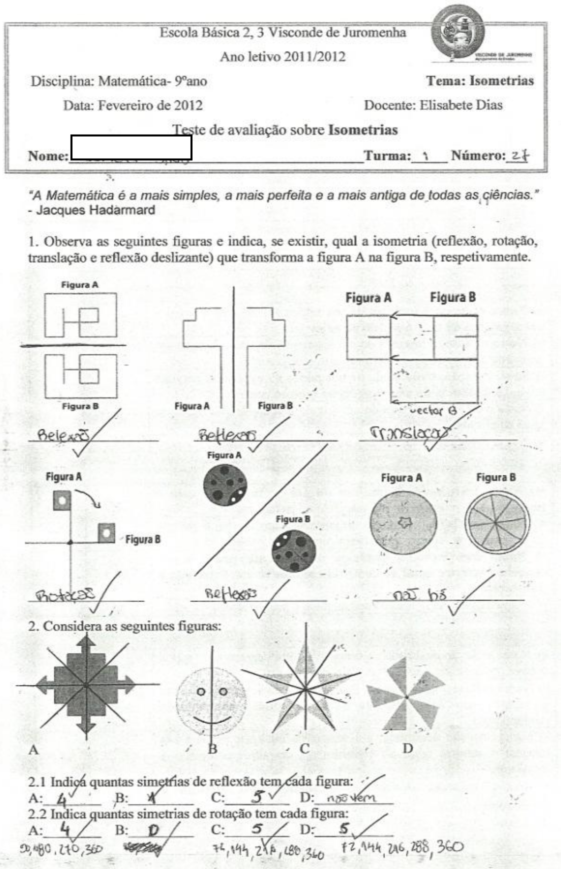
"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."
- Jacques Hadarmard

1. Observa as seguintes figuras e indica, se existir, qual a isometria (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante) que transforma a figura A na figura B, respetivamente.

2. Considera as seguintes figuras:

2.1 Indica quantas simetrias de reflexão tem cada figura:
A: 4 B: 1 C: 5 D: 0
2.2 Indica quantas simetrias de rotação tem cada figura:
A: 4 B: 0 C: 5 D: 5

Figura 4.59. Produção de A21 no teste de avaliação formativo



Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha
Ano letivo 2011/2012
Disciplina: Matemática- 9ºano | Tema: Isometrias
Data: Fevereiro de 2012 | Docente: Elisabete Dias
Teste de avaliação sobre **Isometrias**
Nome: **Turma:** 1 **Número:** 27

"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."
- Jacques Hadarmard

1. Observa as seguintes figuras e indica, se existir, qual a isometria (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante) que transforma a figura A na figura B, respetivamente.

2. Considera as seguintes figuras:

2.1 Indica quantas simetrias de reflexão tem cada figura:
A: 4 B: 1 C: 5 D: não tem
2.2 Indica quantas simetrias de rotação tem cada figura:
A: 4 B: 0 C: 5 D: 5
90,180,270,360 72,144,216,288,360 72,144,216,288,360

Figura 4.60: Produção de A27 no teste de avaliação formativo

Análise das respostas ao teste de avaliação sumativo

O teste de avaliação sumativo foi aplicado, como já referido, após a interrupção letiva da Páscoa, por termos interesse em avaliar se efetivamente houve aprendizagem, ou seja, se houve compreensão efetiva dos conceitos matemáticos lecionados. O teste era composto por quatro questões, sendo que na primeira, era pedido que o aluno identificasse a transformação que permitia transformar uma figura noutra, caso existisse, sendo, para isso, fornecidas várias imagens. A questão seguinte, desdobrava-se em três alíneas e pedia-se para construir: na alínea a) a imagem de um polígono dado, através de uma reflexão de eixo de reflexão r; na alínea b), a imagem de um triângulo através de uma translação conhecido o vetor associado e, na alínea c), a imagem de um trapézio através de uma rotação em que era indicado o centro e a amplitude do ângulo de rotação. Na questão três, retirada de um exame nacional do 9.º ano, pedia-se para identificar, em quatro respostas possíveis, a figura em que um eixo r dado é eixo de reflexão vertical dessa figura. Na última questão, pedia-se aos alunos para descrever as simetrias (axial e rotacional) contidas num conjunto de figuras dadas, tendo que referir o seu eixo de simetria, o centro da rotação e a amplitude do ângulo da rotação.

Relativamente à questão 1.1, em que se pedia a identificação, caso existisse, da transformação isométrica, que transforma a figura A na figura B, todos os alunos responderam corretamente, excepto na alínea envolvendo o conceito de reflexão deslizante, em que um aluno não foi capaz de identificar a transformação geométrica (figura 4.61).

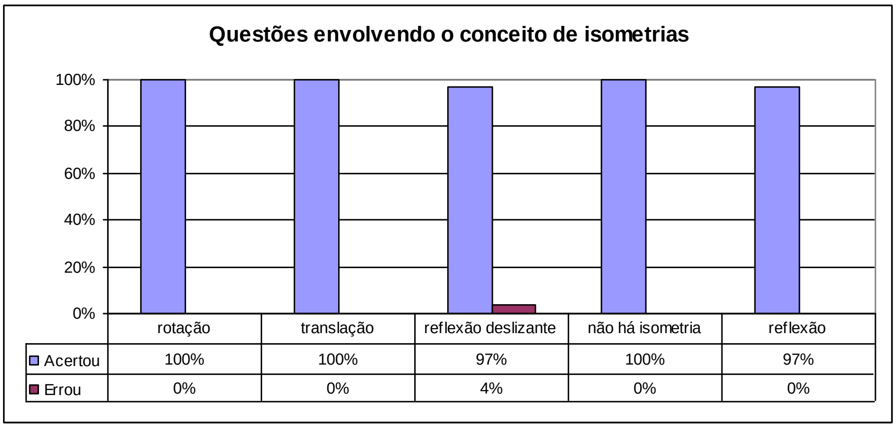
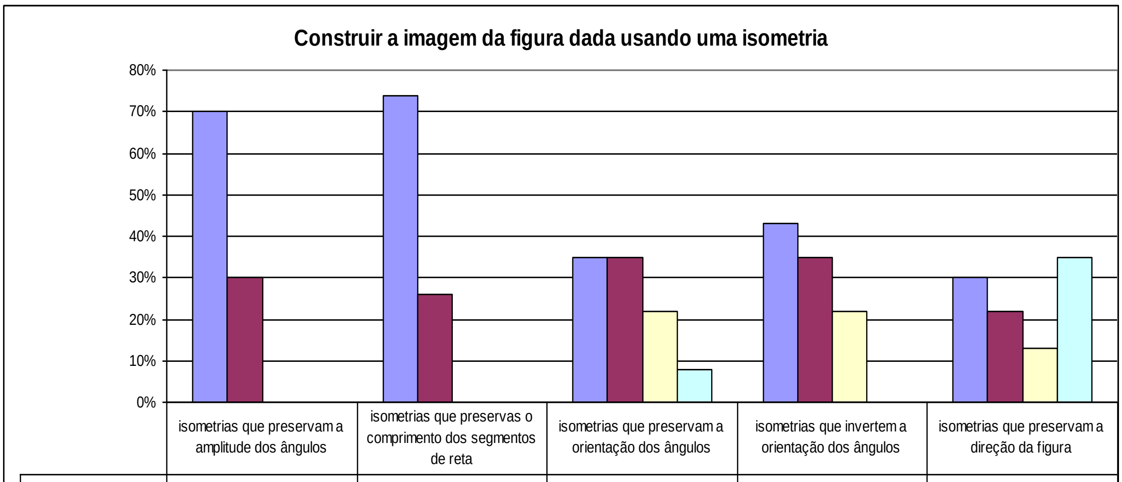


Figura 4.61: Identificação das isometrias no teste de avaliação sumativo

No que concerne à questão 1.2, relativa às propriedades das quatro isometrias estudadas relacionadas com a conservação da amplitude dos ângulos, conservação do comprimento dos segmentos de reta, conservação/inversão da orientação dos ângulos e preservação da direção dos segmentos de reta) verificamos que cerca de 70% dos alunos reconheceu que todas as isometrias estudadas preservam a amplitude dos ângulos e os comprimentos dos segmentos de reta (figura 4.62).

Relativamente às restantes propriedades, optámos pela seguinte classificação: “acertou plenamente”, respostas em que os alunos identificam corretamente as propriedades das quatro isometrias; “acertou parcialmente”**-** respostas em que o aluno não reconhece todas as propriedades de uma dada isometria, errando algumas ou não identificado alguma das propriedades e “errou”**-** respostas que estão totalmente erradas;

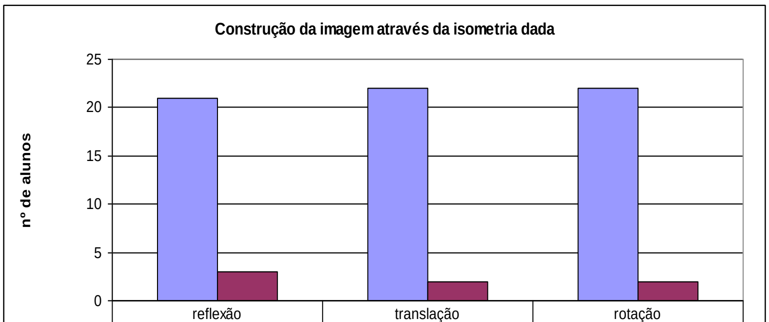
A análise das respostas dos alunos leva-nos a concluir que os alunos ainda evidenciam algumas dificuldades no reconhecimento da conservação/ inversão da orientação dos ângulos, bem como no reconhecimento da conservação ou não da direção dos segmentos de reta, sendo, por isso, necessário revisitar e aprofundar os conceitos subjacentes a estas propriedades das isometrias.



	isometrias que preservam a amplitude dos ângulos	isometrias que preservas o comprimento dos segmentos de reta	isometrias que preservam a orientação dos ângulos	isometrias que invertem a orientação dos ângulos	isometrias que preservam a direção da figura
Acertou plenamente	70%	74%	35%	43%	30%
acertou parcialmente	30%	26%	35%	35%	22%
Errou	0%	0%	22%	22%	13%
não respondeu	0%	0%	8%	0%	35%

Figura 4.62. Construção da imagem de uma figura através da isometria dada no teste de avaliação sumativo

No que concerne à questão 2 - construção do transformado de um polígono a partir de uma translação, uma rotação e uma reflexão - observamos na figura 4.63 que quase todos os alunos conseguiram desenhar a imagem de um polígono através da isometria dada, pelo que inferimos que as isometrias foram, de forma bastante satisfatória, percebidas e assimiladas.

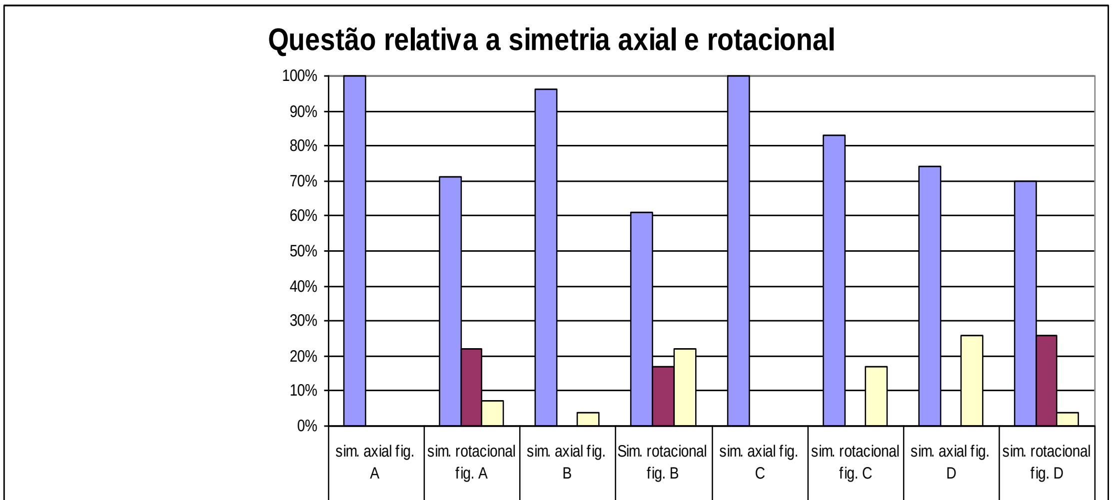


	reflexão	translação	rotação
acertou	21	22	22
errou	3	2	2

Figura 4.63. Construção da imagem através de uma isometria dada no teste de avaliação sumativo

Na questão 3 do teste de avaliação sumativo - identificar o eixo de reflexão dada a figura geométrica e o respetivo transformado numa reflexão - registamos que só metade dos alunos acertou, o que indica que se tratou de uma questão que apresentou um grau de dificuldade considerável para cerca de metade dos alunos, revelando que subsiste ainda alguma incompreensão sobre os conceitos de simetria axial e eixo de reflexão.

No que concerne à questão 4, identificar e descrever as simetrias axiais e rotacionais das figuras dadas, verificamos que quase a totalidade dos alunos conseguiu identificar as simetrias axiais e em menor percentagem as simetrias rotacionais. Contudo, a maior parte dos alunos conseguiu identificar que a figura d apresentava simetria rotacional mas sem conseguir identificar corretamente a amplitude do ângulo de rotação (figura 4.64).



	sim. axial fig. A	sim. rotacional fig. A	sim. axial fig. B	Sim. rotacional fig. B	sim. axial fig. C	sim. rotacional fig. C	sim. axial fig. D	sim. rotacional fig. D
Acertou plenamente	100%	71%	96%	61%	100%	83%	74%	70%
não identifca amplitude de ângulos da rotação		22%		17%		0%		26%
Errou	0%	7%	4%	22%	0%	17%	26%	4%

Figura 4.64. Simetria axial e rotacional no teste de avaliação sumativo

Em termos das classificações, qualitativa e quantitativa, obtidas pelos alunos no teste de avaliação sumativo há que referir que os alunos obtiveram um nível qualitativo de, pelo menos, de satisfaz, sendo que mais de 50% dos alunos tiveram uma classificação quantitativa superior a 75% e três dos alunos tiveram classificação de 100%. Pelos resultados obtidos inferimos que os alunos compreenderam, de forma bastante satisfatória as simetrias e as isometrias. Na tabela 4.1 apresentam-se os resultados dos alunos no teste sumativo.

Nº do aluno	Pontuação	Classificação
1	76	Bom
2	72	Satisfaz
4	70	Satisfaz
5	100	Muito bom
6	80	Bom
7	85	Bom
8	80	Bom

Nº do aluno	Pontuação	Classificação
15	74	Satisfaz
16	84	Bom
17	79	Bom
19	89	Bom
20	70	Satisfaz
21	96	Muito bom
22	66	Satisfaz

9	56	Satisfaz		23	69	Satisfaz
10	69	Satisfaz		24	55	Satisfaz
11	61	Satisfaz		25	89	Bom
13	100	Muito bom		26	58	Satisfaz
14	85	Bom		27	100	Muito bom

Síntese

Classificação	Frequência absoluta
Fraco (1-19)	0
Não satisfaz (20-44)	0
Satisfaz pouco (45-54)	0
Satisfaz (55-74)	11
Bom (75-89)	9
Muito Bom (90-100)	4

Tabela 4.1. Classificação quantitativa e qualitativa do teste de avaliação sumativo

4.2. Análise e discussão dos dados

Neste ponto vamos proceder a uma análise de conteúdo dos dados tendo como referencial as categorias (desempenho matemático e desempenho afetivo e atitudinal) e respetivas dimensões de análise que passamos a recordar.

- Desempenho matemático:
  - Compreensão de diferentes transformações geometricas (isometrias) e suas propriedades;
  - Reconhecimento e aplicação das isometrias em contextos diversificados.
- Desempenho afetivo e atitudinal:
  - Motivação na realização das atividades propostas e curiosidade por indagar e explorar regularidades presentes em contextos diversificados;
  - Apreciação da presença de ideias matemáticas em artefatos culturais e das qualidades estéticas dos desenhos *Sona*.

4.2.1. Desempenho matemático dos alunos

O desempenho matemático dos alunos estrutura-se em torno das duas dimensões de análise atrás elecandas: compreensão de diferentes transformações geometricas (isometrias) e suas propriedades e reconhecimento e aplicação das isometrias em contextos diversificados.

– **Compreensão de diferentes transformações geometricas (isometrias) e suas propriedades**

Esta dimensão de análise remete para a compreensão dos conceitos de reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante e das propriedades destas quatro isometrias. Envolve ainda o desenvolvimento do conceito de simetria, nomeadamente, a extensão da ideia de simetria, até aqui apenas associada à simetria axial, à de simetria rotacional. Dos dados atrás apresentados incidindo sobretudo sobre as atividades realizadas em aula, nas quais se incluem os testes de avaliação formativo e sumativo, e ainda a observação feita em cada aula (sessão), as notas de campo realizadas pela docente -

investigadora após cada aula (sessão), podemos concluir que a maioria dos alunos conseguiu atingir os seguintes objetivos: dada uma figura geométrica e o transformado, identificar e descrever a isometria em causa; construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria; reconhecer, no geral, as propriedades das isometrias; completar e desenhar padrões geométricos que envolvam isometrias e simetrias; compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias axiais numa figura.

No entanto, alguns alunos revelaram dificuldades em reconhecer que a translação é a única isometria que conserva a direção e que a reflexão e a reflexão deslizante invertem a orientação dos ângulos. Em alguns alunos, verificou-se que a reflexão deslizante não foi completamente interiorizada, dado que esta isometria é a composição de duas isometrias e por isso mais complexa na sua compreensão. Ainda que a maioria dos alunos apreendesse a ideia de reflexão como simetria axial, verificou-se alguma incapacidade em identificar/desenhar todos os eixos de simetria de figuras com mais do que uma simetria axial. Em relação à simetria rotacional, apesar do conceito ter sido trabalhado de forma explicita alguns alunos evidenciaram dificuldades, principalmente, em identificar as simetrias rotacionais de uma figura.

- Reconhecimento e aplicação das isometrias em contextos diversificados

Tal como recomendado no atual Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007) recorreu-se à exploração de artefatos culturais e de imagens do mundo natural e físico com a intenção de proporcionar aos alunos a oportunidade de identificar, em situações reais, a presença de isometrias.

Dos dados apresentados, dos registos da observação feita em cada aula com base na grelha desenvolvida para o efeito, das notas de campo realizadas pela docente - investigadora, podemos concluir que os alunos conseguiram reconhecer e aplicar as isometrias em contextos variados e diversificados - em várias situações e objetos do seu dia a dia, em várias áreas do conhecimento e em aspetos sócio-culturais dos vários povos, etnias, etc. A este própósito registámos em notas de campo, aquando da projeção do *powerpoint* sobre *"Simetrias na natureza, na arte, na arquitetura, …"* na 5.ª sessão, o seguinte:

Tendo os alunos prestado bastante atenção, tentando ver as isometrias e as simetrias presentes nas várias imagens exibidas, percebendo que as simetrias são algo que encontramos no nosso dia a dia, na arte, na natureza (humana, animal, vegetal, …), na arte, na arquitetura,…. Informei que ao conceito de simetria está associado, na arte, a noção de equilíbrio, de beleza, de perfeição,…".

De igual modo, na 6.ª sessão, registámos *alguns alunos iam comentando as isometrias que encontravam nas manifestações culturais, e a turma estava bastante atenta. A maioria não sabia a localização geográfica de alguns países e não tinha consciência da quantidade de atividades culturais com conhecimentos matemáticos praticados pelo mundo inteiro.*

4.2.2. Desempenho afetivo e atitudinal

A categoria "Desempenho afetivo e atitudinal" engloba aspetos que podem contribuir efetivamente para a aprendizagem, pois tanto os afectos como as atitudes influenciam a forma como o aluno se envolve nas atividades e aprende. Sendo as atitudes construtos pessoais, atributos da personalidade, complexos e dinâmicos, estas só podem ser inferidas a partir do comportamento observável. Assim, como já referido, esta categoria de análise de dados está organizada em torno dos comportamentos apresentados pelos alunos face às tarefas propostas pela docente - investigadora e do seu envolvimento na realização das atividades matemáticas. Dentro desta categoria, definimos as seguintes dimensões de análise: motivação na realização das atividades propostas; curiosidade por indagar e explorar regularidades presentes em contextos diversificados; valorização das qualidades estéticas dos desenhos *sona*; apreciação da presença de ideias matemáticas em artefatos culturais.

- **Apreciação da presença de ideias matemáticas em artefatos culturais e das qualidades estéticas dos desenhos *Sona***

Interessa-nos avaliar se a sequencia didática contribuiu para desenvolver a consciência da presença de ideias matemáticas em artefatos culturais e, em particular nos desenhos *sona*. Interessa-nos ainda perceber até que ponto os alunos apreciaram as qualidades estéticas destes desenhos.

Os dados recolhidos permitem-nos concluir que a quase totalidade dos alunos apreciou a presença de ideias matemáticas e, em particular, as relacionadas com a noção de simetria em artefatos culturais. O facto de os alunos procurarem invariantes num grande número das imagens apresentadas nos *powerpoints*, constitui, em nossa opinião, um indicador da apreciação da presença de ideias matemáticas nos mais variados contextos. Para além disso, a maioria evidenciou perceber a existência de ligações entre a matemática e as diferentes manifestações artísticas e culturais, designadamente, perceber que esta é, muitas vezes, mais implícita do que explicita. Por fim, há que notar que os alunos parecem ter observado que a matemática se aplica ao mundo real e, ainda, que esta surge do mundo que os rodeia.

Relativamente à apreciação das qualidades estéticas dos desenhos *sona,* podemos destacar que foi patente que todos os alunos as valorizaram e admiraram, em particular, a técnica de execução, a que se associa a dificuldade de desenhar e contar a história simultaneamente. Pretendia-se que os alunos percebessem que, apesar da grande variedade de manifestações sócio-culturais do povo *Cokwe,* onde se inserem os desenhos *sona,* a arte deste povo não é criada para ser contemplada, pois os *sona* são apagados quase de imediato após a sua criação. Estes revestem-se de particularidades expressivas e na sua maioria das vezes, constituem um meio para a transmissão de conhecimentos e de valores sociais, por meio dos quais pode ser definida a sua especificidade, ou seja a natureza ou a essência da própria humanidade. Não nos podemos esquecer que o valor estético atribuído a um objeto não pode ser separado do contexto sócio-cultural a que está ligado. A este propósito, reproduzimos, em seguida, algumas notas de campo da docente - investigadora: Na 1.ª sessão, *os alunos demonstraram bastante interesse e admiração pelos desenhos e reconheceram o grau de dificuldade da sua execução* e *o facto de os elementos do povo Cokwe contarem a história e desenharem ao mesmo tempo causou bastante admiração dos alunos, tendo mesmo alguns dito que não era possível, pelo que a docente voltou a expressar a sua admiração por estas atividades culturais e reforçando que este povo contava a história e desenhava ao mesmo tempo. A aula resultou bastante bem com os alunos motivados e esforçados em desenhar os desenhos com a mesma técnica usada pelo povo e com rigor e perfeição, demonstraram admiração e respeito pelo povo cokwe, tendo alguns mesmo visto alguns elementos matemáticos pretendidos*.

- **Motivação na realização das atividades propostas e curiosidade por indagar e explorar regularidades presentes em contextos diversificados**

Interessa-nos também perceber até que ponto os alunos se sentiram motivados para a realização das tarefas propostas pela docente. Para tal, teremos em conta a reação dos alunos às tarefas propostas, o nível de participação oral, escrita e gráfica durante a realização das atividades, a participação nas discussões em grande grupo, em interagir e cooperar com os colegas, a predisposição para concluir as atividades/tarefas e para corrigir os aspetos menos bem conseguidos ou errados do seu trabalho e a iniciativa de esclarecer dúvidas com a docente.

Em primeiro lugar, há que destacar que os alunos revelaram um grande entusiasmo e empenhamento na realização das atividades. Uma vez proposta uma tarefa pela docente, observámos e registámos em notas de campo que os alunos assumiam, de forma automática e autónoma, que tinham de as realizar, começando a resolvê-las de imediato. *Os alunos estiveram absorvidos a inventar/ criar desenhos sona e iam surgindo desenhos com bastante qualidade e de difícil execução. Os alunos, mesmo sem a docente ter pedido e referido em voz alta, atribuíram um título aos seus desenhos, pois associaram o desenho a uma história. Dados os alunos estarem tão interessados e absorvidos, concedi 10 minutos. (…) Avancei para a visualização de um pequeno powerpoint sobre "Simetrias na natureza, na arte, na arquitetura,…," tendo os alunos prestado bastante atenção, percebendo que as simetrias são algo que encontramos no nosso dia a dia, na arte, na natureza (humana, animal, vegetal, …), na arte, na arquitetura,….* (N.C., 5.ª sessão). Na 1.ª sessão registamos que aquando da entrega da ficha de tarefas "Geometria *Sona*" e da folha de papel ponteado quadriculado, *os discentes começaram a desenhar, de imediato, os desenhos sona e todos conseguiram desenhar sona, com exceção de um aluno, A9, que conseguiu acompanhar com o lápis em cima dos desenhos sona mas que, no entanto, não o conseguiu reproduzir no papel. A docente foi sempre elogiando os desenhos e não teve necessidade de ajudar nos desenhos e nem a sua técnica de execução. Os alunos esforçaram por desenhar os desenhos com a técnica usada* *pelo povo, com rigor, beleza e perfeição e alguns disseram que não era fácil. Houve inclusive uma aluna, A1, que desenhou sozinha o desenho sona "a leoa" para espanto da docente, pois este é de difícil execução* (N.C., 1.ª sessão).

Relativamente ao questionário aplicado a seis dos alunos, todos consideraram que as atividades envolvendo os desenhos *sona* incentivaram a efetuar as tarefas propostas pela docente, tendo sido referido que as acharam interessantes, dado que foram diferentes das habitualmente apresentadas. Um aluno referiu que gostou pelo facto de ter que desenhar e ter experimentado atividades e tarefas novas, que desafiaram a sua criatividade. Outro aluno achou que os alunos gostaram mais das aulas de matemática pois não se efetuou contas, tornando assim as aulas mais divertidas. Outro, referiu que gostou porque adquiriu novos conhecimentos acerca do povo *Cowke*, embora considerasse os desenhos difíceis de executar, ressaltando que estes proporcionaram aulas diferentes. Por último, um aluno admitiu ter-se sentido muito incentivado a realizar as tarefas propostas pela docente, embora não fosse grande apreciador dos desenhos *sona*. Também os dados recolhidos através do questionário final (aplicado a vinte e tres alunos) está bem patente que a geometria *sona* constituiu motivação/estímulo para a realização de tarefas matemática propostas pela docente. De facto, como já tivemos ocasião de referir, a totalidade dos alunos foram de opinião que as atividades com *sona* tornaram a matéria mais interessante, 87% admitiram que estas propiciaram uma maior atenção à aula, 95,7% consideraram que os *sona* os motivaram para a realização das tarefas propostas pela professora e 76,9% assumem de modo explicito que as atividades realizadas os motivaram para a aprendizagem.

Apresentamos algumas notas de campo que concorrem para as conclusões atrás destacadas. Na 4.ª sessão, *(…) a docente entregou uma ficha com sopa de letras sobre isometrias/simetrias e palavras cruzadas sobre a mesma, tendo os alunos ficado absorvidos com estas atividades. Fez-se silêncio na sala de aula, que não é habitual, pois estes alunos assim como os restantes da escola, são normalmente bastante faladores e barulhentos nas suas intervenções e participações, dentro e fora da sala de aula. A aula decorreu de forma silenciosa, tendo o aluno A5, sido o primeiro a fazer a sopa de letras e as palavras cruzadas. O aluno A10, que não gosta de matemática, comentou em voz alta que as aulas deveriam ser todas assim, pelo que a docente respondeu-lhe que poderia aplicar mais vezes este tipo de atividades para outros temas e capítulos, dado o interesse que os alunos mostravam. Os alunos, com exceção do aluno A5, começaram ainda as palavras cruzadas mas depois tocou e estes saíram. No geral, a aula correu de forma bastante satisfatória, com todos os alunos a participarem e a realizarem os exercícios propostos pela docente, continuando, no entanto, a serem lentos a realizar as tarefas pedidas, verificando ritmos díspares de aprendizagem e de resolução dos exercícios/tarefas propostos pela docente.* (N.C., 4.ª sessão). Na 5.ª sessão, registámos que *os alunos estiveram absorvidos a inventar/ criar desenhos tipo do sona e iam* *surgindo desenhos com bastante qualidade e de difícil execução. Os alunos, mesmo sem a docente ter pedido e referido em voz alta, atribuíram um título aos seus desenhos, pois associaram o desenho a uma história. Dados os alunos estarem tão interessados e absorvidos, a docente concedeu 10 minutos e pediu-lhes para acabarem em casa e informou que a turma iria eleger o melhor desenho segundo os critérios apresentado no desafio, na aula seguinte* (N.C., 5.ª sessão).

Em função do exposto, podemos afirmar que os dados recolhidos são consistentes com a conclusão de que os alunos consideraram as aulas diferentes do habitual, que as tarefas propostas os incentivaram à realização de atividades e que estes valorizaram o seu caráter não rotineiro, bem o facto de algumas permitirem desenvolver a criatividade. Podemos ainda salientar que a maioria dos alunos se tornou consciente da beleza visual associada aos conceitos matemáticos que estavam a ser trabalhados. mostrou curiosidade para indagar e explorar regularidades presente em contextos diversificados. A riqueza dos trabalhos produzidos pelos alunos em casa, respondendo a desafio de criar um desenho *sona* que cumprisse a regras do seu traçado, é um indicador que corrobora a conclusão de que as atividades realizadas contribuiram para promover a curiosidade e o interesse em explorar regularidades. Contudo, registamos um aluno que referiu não ter sentido curiosidade em explorar as regularidades presentes na geometria *sona*.

Capítulo 5 - Conclusões, limitações e recomendações

Nota introdutória

Neste capítulo começa-se por apresentar as principais conclusões provenientes da análise realizada sobre os dados recolhidos, procurando relacionar os resultados apresentados com as questões inicialmente formuladas e com o enquadramento teórico. Seguidamente, indicam-se as principais limitações do estudo e sintetizam-se algumas recomendações que dele decorrem para investigações futuras. Por fim, conclui-se o trabalho com uma reflexão pessoal sobre a experiência desenvolvida e dos seus contributos para o desenvolvimento profissional da docente - investigadora.

5.1 Conclusões do estudo (Discussão de resultados)

A recolha de dados efetuada numa turma do 9.º ano e a sua análise incidiu sobre 23 alunos dessa turma. Na preparação e implementação deste estudo tomaram-se em consideração as orientações curriculares nos documentos: Programa de matemática de 1991 (ME-DGEBS, 1991) e as formuladas pelo Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007), bem como as mais recentes perspetivas curriculares, nacionais e internacionais, sobre o ensino da matemática, da geometria e da dimensão educacional da etnomatemática. O desenvolvimento da investigação consistiu na conceção, desenvolvimento e implementação de uma sequência didática centrada na geometria *sona*, no âmbito da unidade de ensino "*Circunferências e Polígonos. Rotações*.", incidindo, mais concretamente, no tópico isometrias e simetria (axial e rotacional). A sequência didática incluiu um conjunto de tarefas privilegiando a geometria *sona* e que foram concebidas e desenhadas com o intuito de motivar os alunos para a realização de atividade matemática promotora de aprendizagens e do estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas. A docente preocupou-se em proporcionar aos alunos uma sequência de tarefas diversificadas e significativas, tendo em vista as capacidades gerais/ transversais e específicas que todos os alunos devem desenvolver até ao final do 3.º ciclo do ensino básico. Procurou-se também criar uma dinâmica de aula que integrasse o trabalho individual, o trabalho de pares e a discussão em grande grupo, com a participação de todos os alunos.

Apresenta-se neste subcapítulo a síntese dos resultados obtidos a partir dos questionários administrados durante a realização da sequência didática e dos resultados do teste diagnóstico, do teste de avaliação formativo, do teste de avaliação sumativo, das respostas aos vários desafios propostos e de uma ficha de tarefas, aos quais se associa os resultados provenientes da observação das aulas em que as tarefas foram implementadas. Com a triangulação dos dados obtidos, pretendeu-se diminuir a subjetividade do estudo e pretende-se, agora, com estes resultados responder às questões deste estudo. Centrado nas isometrias e na simetria axial e rotacional, na etnomatemática e na geometria *sona*, a professora - investigadora, investiu na resposta às três questões de investigação: Assim, começa-se por confrontar os resultados com as questões de investigação, para então se proceder à avaliação do estudo como um todo.

Procuremos agora dar resposta à questão orientadora do estudo formulada no capítulo I:

- Em que medida o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem em que se exploram aspetos socioculturais da matemática, com recurso à geometria *sona*, contribui para a aprendizagem das isometrias, ao nível de conhecimentos e das capacidades matemáticas e ao nível atitudinal e afetivo?

No que respeita ao contributo das estratégias de ensino e aprendizagem em que se exploram aspetos socioculturais da matemática, com recurso à geometria *sona* para a aprendizagem das isometrias, os resultados obtidos através dos questionários e da observação participante permitem-nos salientar que os participantes consideraram que as estratégias utilizadas contribuíram para aumentar os seus conhecimentos sobre o tema abordado, permitindo uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Identificaram-se algumas dificuldades ao nível da interpretação dos enunciados das tarefas, isto é, em entender o que era pedido, aos alunos e através das notas de campo realizadas pela professora - investigadora. Quanto aos resultados obtidos através do teste diagnóstico e dos testes de avaliação formativo e sumativo, estes evidenciaram que a aprendizagem foi bastante satisfatória, tendo as atividades realizadas facilitado a compreensão dos conteúdos matemáticos. Os resultados globais do teste de avaliação sumativo foram bastante satisfatórios, dado que em termos das classificações, qualitativa e quantitativa, obtidas pelos alunos referira-se que os alunos obtiveram um nível qualitativo de, pelo menos, de satisfaz, sendo que mais de 50% dos alunos tiveram uma classificação quantitativa superior a 75% e três dos alunos tiveram classificação de 100%. Pelos resultados obtidos inferimos que os alunos compreenderam, de forma bastante satisfatória as simetrias e as isometrias. A introdução de uma vertente socio-cultural terá contribuído para tornar a matemática mais interessante e humana, conforme foi referido pelos alunos nas aulas, durante a implementação da sequência didática e nos dois questionários aplicados. Assim, de acordo com os resultados obtidos, pode-se inferir que as práticas implementadas, de índole etnomatemática, particularmente por se terem tratado de aspetos sócio-culturais de um povo, revelaram potencialidades para a apropriação de conhecimento, influenciando, de forma bastante positiva, a aprendizagem em matemática. O reconhecimento da originalidade dos desenhos é um dos aspetos que os alunos mais destacaram nas respostas dadas ao questionário aplicado a todos os alunos da turma, seguindo-se na hierarquização realizada, o facto de a maioria dos desenhos serem desenhados sem levantar o dedo, isto é, traçando uma só linha contínua. O terceiro aspeto mais destacado remeteu para o reconhecimento da presença de conteúdos da matemática escolar em desenhos produzidos por um povo com pouca (ou nenhuma) escolaridade. O quarto aspeto mais destacado está, de novo, relacionado com o processo de traçado dos *sona*, ou seja, os alunos valorizaram também o facto de não se poder passar duas vezes sobre a mesma linha do desenho, apesar das linhas se poderem cruzar. Finalmente, alguns alunos consideraram que os *sona* relacionam a matemática com atividades culturais de um povo. No que concerne à opinião sobre o grau de dificuldade das atividades realizadas, 15 alunos consideraram-nas difíceis. No que concerne ao contributo efetivo das atividades que explorem aspetos sócio-culturais da matemática para o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina e para a apreciação da matemática, os participantes envolvidos neste estudo consideraram as tarefas propostas interessantes, permitindo-lhes descobrir a presença de conhecimentos matemáticos em atividades do dia a dia. De um modo geral, os alunos referiram sentir-se motivados para saber mais sobre o povo *Cokwe*. Pelos resultados a que se chegou, parece também poder concluir-se que, no geral, os alunos ganharam confiança nas suas capacidades, ficaram, motivados para a aprendizagem matemática e desenvolveram atitudes positivas em relação à matemática e à geometria. De facto, os comentários aquando da visualização dos diversos *powerpoints* exibidos ou em conversas informais com a docente - investigadora, as respostas ao questionário aplicado aos seis alunos (onde se pedia para estes apresentarem exemplos de objetos reais contendo simetrias e isometrias) e os registos em notas de campo elaboradas pela docente – investigadora, evidenciam que os alunos ficaram sensíveis à aplicabilidade e universalidade da matemática. Tornou-se também evidente que os alunos admiraram o lado estético das várias manifestações matemáticas em artefactos culturais, verificando-se um aumento do interesse dos alunos pelas isometrias. Os alunos manifestaram apreciação da matemática como sendo um esforço cultural e viram o papel da matemática nas várias culturas, na arte e que está presente em várias disciplinas escolares. Podemos inferir que, no geral, se não na totalidade, os alunos desenvolveram atitudes positivas em relação à matemática.

Destacamos o facto da turma ter muitos alunos de origem africana, grande parte angolana ou com ascendentes angolanos. Contudo, nenhum dos alunos desta turma conhecia a tradição dos desenhos *sona*. Saliento o interesse que os *sona* despertaram nos alunos de origem portuguesa, que mostraram admiração e vontade de saber um pouco mais deste povo e dos seus vários aspetos culturais. Supreendentemente, os alunos angolanos e de Cabo Verde não mostraram tanto interesse em saber mais sobre o povo *Cokwe*..

Depois de responder à questão de investigação, vamos relembrar os três objetivos do estudo e fazer uma análise fundamentada sobre a sua consecução:

- Conceber, desenvolver e avaliar uma sequência/unidade didática integrando desenhos tradicionais africanos (desenhos *sona*) para a abordagem das isometrias no 9.º ano de escolaridade;
- Evidenciar o valor da geometria *sona* para a aprendizagem das isometrias;

- Analisar se a introdução em sala de aula de contextos socioculturais contribui para motivar os alunos para a realização de atividade matemática e para a valorização do papel da matemática na vida social e cultural.

No que concerne ao primeiro objetivo do estudo- *Conceber, desenvolver e avaliar uma sequência/unidade didática integrando desenhos tradicionais africanos (desenhos sona) para a abordagem das isometrias no 9.º ano de escolaridade*; este foi amplamente atingido.

Relativamente ao segundo objetivo do estudo- *Evidenciar o valor da geometria sona para a aprendizagem das isometrias*, de facto, a geometria *sona* auxiliou na aprendizagem do tópico das isometrias, corroborando os resultados obtidos por Evangelista (2011), que concluiu que o recurso Geometria *Sona* do povo *Cokwe* é um agente motivador e que pode contribuir para a aprendizagem das transformações isométricas.

Quanto ao terceiro e último objetivo- *Analisar se a introdução em sala de aula de contextos socioculturais contribui para motivar os alunos para a realização de atividade matemática e para a valorização do papel da matemática na vida social e cultural*, podemos referir que, de facto, a introdução em sala de aula de contextos sócio culturais contribuiu para motivar os alunos e que estes valorizaram e apreciaram o papel da matemática na vida da humanidade e que constataram que está presente em várias manifestações sócio-culturais de povos, grupos, confirmando as afirmações de Gerdes (2007) e de D`Ambrósio (2001), para quem a etnomatemática enaltece a matemática dos diferentes grupos culturais.

A presente investigação reforça alguns estudos realizados por investigadores conceituados. Por exemplo, Campos (2006) refere que a etnomatemática torna a aprendizagem mais significativa para o aluno, em especial, por evidenciar que a matemática está presente em vários aspetos da vida, e por criar as bases para que o aluno se torne um cidadão ativo na sociedade, respeitador das diferenças entre as culturas e os povos. Por sua vez, Bassanezi (2002, citado em Milton & Orey, 2006) salienta que, todo o passado cultural do aluno deve ser respeitado, dando-lhe confiança no seu próprio conhecimento e uma certa dignidade cultural ao ver as suas origens sendo trabalhadas e abordadas pelo docente, pois estimula a sua confiança, podendo ser um fator atenuante de atitudes negativas em relação à disciplina de matemática**.** Biembengut (2012, p. 37) afirma que a etnomatemática, na educação formal matemática, pode proporcionar ao aluno, de qualquer nível de escolaridade, uma aprendizagem mais significativa possibilitando: *melhor apreensão dos conceitos frente à aplicabilidade; integração da matemática com outras áreas do conhecimento; estímulo à criatividade na formulação e resolução de problemas; discernimento de valores e concepções dos antepassados; valorização das competências das culturais sociais, (...).* Esta mesma autora afirma que as pesquisas etnomatemáticas realizadas no âmbito no ensino de matemática têm mostrado e evidenciado que, mais do que conhecimento de regras matemáticas, a etnomatemática proporciona valores culturais ao aluno e alguns princípios gerais sobre o seu papel como responsável pela realidade circundante (*ibidem*).

Os resultados obtidos reforçam a opinião de Almeida (2011) quando este refere que a adopção de estratégias lúdicas e artísticas, envolvendo a etnomatemática, em articulação com o trabalho desenvolvido em sala de aula, constitui uma forma exemplar de envolver os alunos na construção do seu próprio conhecimento, predispondo-os para novas e significativas aprendizagens**.** Fantinato (2004, pp. 177-178, citado em Melo, Fantinato, Thees, Silveira & Soares, 2011) declara que: a *etnomatemática desmistifica o caráter universal, a-histórico da matemática escolar, porque vê a matemática como uma produção cultural, contextualizada; analisa, portanto, a sua presença nos contextos da vida cotidiana. (...) Esse reconhecimento passa a ser uma ferramenta poderosa no resgate da auto-estima dos alunos, que, como se sabe, é favorecedora da aprendizagem*.

Mendes (2006, citado em Lima, Sílva, & Melo, 2011) afirma que a etnomatemática dá valor à matemática praticada pelos diferentes grupos culturais, implicando numa crescente valorização dos conceitos matemáticos ditos informais, a partir das suas experiências e que são trazidos pelos próprios alunos (fora do contexto da escola), e que assim existe a possibilidade de uma maior identificação por parte destes com o seu objeto de aprendizagem, através da motivação, das conexões estabelecidas com aspectos afetivos, da aquisição de habilidades científicas e da compreensão na importância da igualdade entre as diversas formas de manifestação de saberes e conhecimentos matemáticos. A formação de atitudes positivas em relação à matemática está diretamente relacionada com a percepção da sua utilidade por parte do aluno. Como Araújo (1999) refere, quando os alunos não conseguem perceber a utilidade de matemática, ocorre frustração e consequentemente, o desempenho nas aulas torna-se insatisfatório, o que confirma que os alunos podem sentir-se frustrados e sentir sentimentos de ansiedade, pelo fato de não entenderem a matemática, repelindo-a sendo esta uma atividade significativa e valiosa.

Os resultados obtidos nos desafios propostos e da observação *in loco* da docente - investigadora, permitem destacar que os participantes envolvidos neste estudo consideraram que as práticas matemáticas realizadas os motivaram para a aprendizagem dos conteúdos abordados, dado que consideraram as tarefas propostas interessantes, diferentes das demais aulas, permitindo desenvolver e envolver outro tipo de habilidades/ capacidades tais como desenhar, permitindo-lhes descobrir as participações dos conhecimentos matemáticos no dia a dia, motivando-os, em geral, para novas pesquisas e mais informações sobre este povo. O facto de as tarefas partirem de uma atividade sócio-cultural de um povo (situação real envolvendo um povo africano) motivou-os, igualmente, para realizarem as tarefas propostas. Os alunos, quase na sua totalidade, mostraram curiosidade em relação ao povo *Cokwe* e à geometria *sona*, e em relação às tarefas propostas pela docente. Estes compreenderam a relevância dos conteúdos matemáticos e das atividades/tarefas matemáticas propostas, prestaram atenção às aulas durante a sequência didática, mesmo os que revelavam desinteresse pela disciplina, realizaram as tarefas propostas e revelaram uma crescente autonomia na sua execução. A motivação para aprender e para dar respostas às tarefas foram evidenciadas pelo envolvimento dos alunos nas atividades desenvolvidas solicitando esclarecimentos relativamente a aspetos que lhes suscitaram dúvidas e demonstrando muita persistência para concluir as tarefas propostas. Destaca-se ainda como positivo o facto de os alunos interagirem com os colegas, participando depois de modo ativo no desenvolvimento da aula e na construção do seu próprio conhecimento. Como Monteiro, Orey & Domite (2004, p. 13, citado em Rosa & Orey, 2006) afirmam, a proposta etnomatemática pode ser interpretada como (…) *uma metodologia que permitiria reconhecer e apresentar a matemática presente no dia-a-dia dos alunos em situações didáticas motivadoras.* Como refere Rosa (2010, citado em Rosa & Orey, 2011), quando a cultura escolar reflete a cultura do lar e da comunidade, as aulas tornam-se num ambiente familiar, podendo motivar a aprendizagem dos alunos. Analogamente, Moll & Greenberg (1990, citado em Rosa & Orey, 2011) afirmam que quando a escola retrata as diferentes maneiras de pensar, os diferentes pontos de vista, as diferentes formas de conhecimento e os vários sistemas de valores a aprendizagem de conteúdos matemáticos se torna mais estimulante e complexo. Doyle (1988); Stein & Smith (1998) referem que a etnomatemática contribui para um bom ambiente de trabalho, motivador e ativo, interessante e estimulante, onde os alunos trabalham ao seu próprio ritmo, envolvem-se mais ativamente e deixam de ter um papel passivo, seguindo a tendência generalizada em educação matemática, que atualmente, sugere que uma aprendizagem eficaz requer que os alunos se envolvam ativamente em tarefas significativas e diversificadas. De facto, a abordagem etnomatemática na sala de aula proporcionou uma participação ativa dos alunos na construção do seu conhecimento. Este tipo de abordagem, referido por vários autores como motivadora para os alunos, permite desenvolver capacidades, contribuindo para um conhecimento mais amplo dos conceitos matemáticos, facilitando o processo de aprendizagem e por fim, auxiliando a estabelecer um ambiente, na sala de aula, em que os alunos participam de forma ativa. Por fim, Wenger (1998, citado em Santos, 2002) considera que a perspetiva etnomatemática na sala de aula estimula o interesse, a excitação, que assim se sentirão mais motivados para aprender matemática, corroborando as conclusões a que se chegou na presente investigação.

5.2 Limitações do estudo e sugestões para futuras investigações

5.2.1 Limitações do estudo

Uma das principais limitações diz respeito ao facto de o estudo ter decorrido durante, somente, parte de um ano letivo e com alunos do 9.º ano de escolaridade. Igualmente temos a consciência de desenvolvido apenas um ciclo de investigação-ação (como já foi referido no capítulo III-

Metodologia, a investigação processa-se em ciclos sendo que cada ciclo é constituído por quatro fases: fase de planificação, seguida da fase de ação, seguida de observação e finalmente a fase de reflexão. O ciclo para se o problema estiver resolvido, pois caso contrário inicia-se um segundo ou mais ciclos. Contudo só foi desenvolvido um único ciclo devido a contigências da própria investigação. No entanto, consideramos que o ciclo implementado se desenvolveu em pequenas etapas de planificação, ação, observação e reflexão sobre a ação realizadas semana a semana (microciclos). Como já anteriormente referido, a investigação ação tem carácter cíclico. Realizar uma investigação pode envolver um único ciclo, sendo mais comum realizar-se vários, dependendo do problema e do tempo que se dispõe para realizar o projeto. Quando a investigação ação está institutalizada, os ciclos da investigação ação são transformados em espirais de ação. Ter presente que os ciclos da investigação ação são mais formas de disciplinar os processos de investigação do que formas de representar a investigação (Latorre, 2008). Em qualquer dos casos, importa destacar e valorizar o papel desta metodologia de investigação para a melhoria da nossa prática de ensino.

Provavelmente seria mais proveitoso e permitiria retirar conclusões mais consistentes, se o estudo fosse realizado ao longo de, pelo menos, um outro ano letivo do ensino básico. De destacar que o facto dos alunos não terem hábitos de realização deste tipo de trabalho, condicionou a qualidade dos mesmos atendendo, principalmente, uma deficiente gestão do tempo por parte dos alunos. Outras limitações foram as atividades extra letivas que decorreram no exterior da escola e no interior da mesma durante o período da implementação da sequência didática. O facto de os alunos se encontrarem, igualmente, num período de realização testes intermédios a várias disciplinas e testes de avaliação sumativos, implicou que estes não tivessem aperfeiçoado ou concluído os desenhos do desafio final, pois este desafio requeria algum dispêndio de tempo, persistência e disponibilidade mental. Este facto não deveria constituir uma limitação, mas numa escola com as características como aquela em que o estudo foi desenvolvido, os alunos não possuem métodos e hábitos de estudo e como tal estudam exclusivamente na véspera dos momentos mais formais de avaliação, deixando as restantes disciplinas de parte, estudando, unicamente e de forma desorganizada para a disciplina que irá ser alvo de avaliação. Pelo apontado anteriormente, a docente lecionou, de uma forma geral, um único bloco de 90 minutos semanalmente, na altura da aplicação da sequência didática. Sendo assim, perdeu-se um pouco o fio condutor, tendo a docente–investigadora a necessidade de rever, em todas as aulas, o que tinha lecionado anteriormente (dado o espaçamento das aulas de matemática). Dadas as especificidades do estudo desenvolvido, que se centrou apenas numa turma do 9.º ano do 3.º ciclo de escolaridade e de atividades sócio-culturais de um povo africano, não podemos generalizar os resultados obtidos. No entanto, gostaríamos de realizar novas abordagens etnomatemáticas, cujas potencialidades são um desafio à imaginação do professor, na promoção de mudança de atitude e de afetividade dos alunos face à matemática e à geometria.

5.2.2 Implicações educativas e sugestões para futuras investigações

Implicações educativas

Tendo em conta as conclusões deste estudo, consideramos que a exploração dos aspetos sócio-culturais de um povo se revelou um recurso educativo bastante relevante. Adoptando uma abordagem etnomatemática, aliada à realização de atividades menos teóricas e de cariz artístico contribuiu para estimular e motivar os alunos, proporcionando oportunidades para aprendizagens matemáticas e simultaneamente, criaram-se condições para o desenvolvimento pessoal, social e cultural dos alunos. Consideramos, assim, muito pertinente a integração de aspetos sócio-culturais no processo de ensino - aprendizagem formal, tanto ao nível do desenvolvimento curricular, como das implicações educativas que daí decorrem para a prática docente. Um aspecto essencial que sobressai deste estudo é que a planificação e implementação de atividades/tarefas sobre temas sócio-culturais potenciadoras de aprendizagem constitui um grande desafio para o docente. No entanto, a reflexão sobre a prática e os resultados do estudo desenvolvido, encoraja-nos a (re)pensar a ação didática, no sentido de utilizar estratégias que possam contribuir para a formação integral dos alunos. As conclusões apresentadas movem-nos na continuação do desenvolvimento de atividades que integrem a matemática não formal no contexto escolar. Entendemos que este estudo foi uma proposta de trabalho inovadora, no sentido de usar aspetos sócio-culturais de um povo africano e em que estão presentes ideias geométricas, com o objetivo de ensinar os conceitos de isometrias e de simetrias. Contudo existem outros conceitos presentes no tema de Geometria que poderão ser trabalhados através desta metodologia. As aulas, no nosso entender, tornam-se mais atrativas e dinâmicas levando os alunos a sentir um maior interesse, maior motivação e uma maior apreciação pela matemática. Consideramos, igualmente, que este poderá ser um caminho possível para se explorar novas culturas, de diferentes regiões ou povos, promover o respeito pelos povos e uma educação de cariz intercultural. O estudo das isometrias e de simetrias dos desenhos *sona* permitiu desenvolver o conhecimento matemático sobre estas transformações geométricas, ao mesmo tempo que forneceu aos alunos a visão de que a matemática está presente em muitos aspetos da vida humana. Por fim, esperamos que este estudo possa constituir uma referência de boas práticas, promotora do desenvolvimento das competências matemáticas e das capacidades afetivas e atitudinais num ambiente inteletualmente rico e estimulante, útil para os professores que percebam a necessidade de melhorar as suas práticas de ensino, utilizando metodologias ativas, participativas e inovadoras, no desenvolvimento de competências múltiplas. Por último, desejamos, de forma humilde, ter contribuído um pouco para a compreensão do papel que estas metodologias podem desempenhar na aprendizagem dos alunos.

Sugestões para futuras investigações

No sentido de esclarecer e valorizar os contributos da Etnomatemática na Educação Matemática, consideramos que será importante, futuramente: compreender como é que a Etnomatemática pode auxiliar os docentes a lidar com a diversidade cultural presente nas escolas; compreender como é que esta pode ajudar os docentes a lidar com grupos homogéneos de alunos; fornecer ferramentas ao docente que lhe permita interpretar a matemática cultural local e saber utilizá-la ao serviço da aprendizagem da matemática; averiguar as dimensões sociais e humanas desenvolvidas pela etnomatemática; compreender o impacto destes aspetos no desenvolvimento de competências dos alunos, na apreciação e na motivação para a matemática, pois da literatura consultada sobressai que são escassos os estudos qualitativos relacionados com a utilização de aspetos sócio-culturais em contextos educativos, nomeadamente com recurso à etnomatemática, em faixas etárias baixas e principalmente relacionados com a Matemática; aplicar este estudo em contextos diferentes, num meio social mais favorecido ou num meio rural; aplicar este estudo com jovens de faixas etárias mais avançadas ou mesmo com outra investigadora; continuar a averiguar o lugar da Etnomatemática na escola de hoje; conhecer o impacto de uma abordagem etnomatemática em outros tópicos da matemática escolar.

5.3 Reflexão pessoal

Não sendo nossa intenção diminuir a importância que a escola assume como instituição e local formal de educação, consideramos que, por vezes, esta está afastada dos interesses e preocupações dos alunos e da sociedade e que a distância com a realidade quotidiana gera, nos alunos, uma abstração do verdadeiro motivo pelo qual a frequentam. Este aspeto torna-se mais evidente numa escola, como a que foi palco do estudo empírico, que acolhe e recebe alunos com diferentes realidades sócio-culturais e que tem de estar ciente que é premente formar cidadãos responsáveis e conscientes do seu envolvimento, do seu papel e do seu contributo na sociedade. No nosso entender, a abordagem etnomatemática na sala de aula pode contribuir tornar a matemática escolar mais relevante e significativa para os alunos, promovendo e aumentando assim a qualidade geral da educação (como confirmam vários estudos e investigações efetuados nesta área). Estamos certos de que nunca se vai finalizar a discussão em torno deste tema, mas no entanto, acreditamos que este estudo possa contribuir para sensibilizar os professores, sobretudo, os que lecionam no ensino básico, para o valor didático da etnomatemática. Consideramos que o uso da etnomatemática na sala de aula poderá aumentar o potencial, o envolvimento, a curiosidade e a criatividade das pessoas que trabalham para um mundo menos compartimentado em domínios de conhecimentos e em práticas de vidas, um mundo que possa ser compreendido nas suas diversidades e particularidades a partir, também, da via educacional. Esperamos, assim, de forma humilde, que a divulgação deste estudo possa encorajar outros docentes a desenvolverem experiências e investigações semelhantes. Esperamos, ainda, que suscite a realização de novas investigações sobre esta temática, de forma a melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática e contribuindo para uma melhor formação matemática e sócio-cultural dos alunos. Estamos convictos do valor da etnomatemática na sala de aula, em particular, o valor do património local para tornar o aluno mais responsável e mais autónomo, melhor observador, mais reflexivo, mais enriquecido de conhecimentos, mais sensível à arte e à matemática, aos diversos conhecimentos matemáticos dos vários povos do mundo, ou seja um cidadão cientificamente mais culto e mais humano.

A concretização deste trabalho de investigação foi um desafio muito importante para nós, a nível pessoal e profissional, por vários motivos. Em primeiro lugar, pela necessidade que suscitou de fazer uma revisão aprofundada da literatura neste área ainda pouco explorada em Portugal e em segundo lugar, pelo esforço de organização e empenho que a implementação no terreno de um projeto desta natureza requer, quando conciliado com o exercício da atividade docente, já de si muito exigente. Por ultimo, pela necessidade que sentimos de adaptar, de forma criativa, os aspetos que delineemos a uma realidade dinâmica como a escola, cujo ambiente possuía caraterísticas e necessidades próprias que foram influenciando, de forma diária, as nossas opções e ações.

Como já referido, a opção por ter realizado esta investigação foi motivada pelo nosso interesse pessoal pela aprendizagem da geometria e pela necessidade que vinhamos sentindo em aprofundar conhecimentos que nos pudessem orientar e auxiliar na nossa prática profissional no sentido de poder contribuir para diminuir a taxa de insucesso na disciplina. Não sentimos muitas dificuldades em construir uma proposta didática original que nos parecesse suficientemente interessante e que permitisse atingir os objetivos que tinhamos em mente. Apesar de ser a primeira vez que, como investigadora, desenvolvemos um trabalho de investigação desta dimensão e de alguns instrumentos, e de estar consciente que os materiais que poderiam ter sido aperfeiçoados, num ou noutro aspeto pontual, acreditamos que estes acabaram por cumprir bem o seu papel neste estudo.

Analisando, de forma retrospetiva, o percurso desenvolvido por nós, como investigadora ao longo deste estudo, posso destacar, também alguns aspetos em que a realização desta investigação influenciou, de forma positiva, o nosso desempenho como professora. Esta experiência permitiu-nos conhecer, em pormenor, as dificuldades que os alunos manifestaram na identificação das transformações isométricas, no domínio da Geometria. Embora seja um estudo de natureza qualitativa e como tal, não generalizável, constituiu uma mais valia para nós enquanto professora, pelos contributos imediatos que teve sobre a nossa ação diária. Os resultados foram os esperados e os desejados e foram relevantes para o ensino e aprendizagem da matemática da turma em que o estudo foi desenvolvido. A realização desta investigação e as condicionantes com que nos deparamos, levou-nos a refletir e repensar em alguns dos aspetos que estiveram na origem das nossas opções e ações, de modo a poder enveredar por caminhos que se revelaram mais favoráveis e outros que possam ser melhorados, em futuras investigações, relativamente às potencialidades, ao nível didático, de um estudo deste tipo.

Reforçando as ideias de vários autores, nacionais e internacionais, que serviram de base a este estudo, seria interessante continuar a centrar as investigações nesta área, uma vez que a investigação veio vincular a ideia de que o estudo das isometrias associada à etnomatemática vão ao encontro de uma aprendizagem matemática significativa por parte dos alunos. Acreditamos, ter contribuído, nos alunos para o desenvolvimento de competências no domínio da geometria, em particular, e da matemática, em geral. A opção pelo estudo das isometrias pareceu-nos ser uma via adequada e inovadora para um crescente interesse por parte dos alunos, ao permitir a compreensão da ligação entre a matemática e o mundo onde habitam e de uma imagem mais positiva da matemática. Este estudo mostrou, igualmente, que é possível que alunos com baixos níveis de aproveitamento e pouco interesse em relação matemática adotem uma atitude mais dinâmica e mais positiva em relação à disciplina. Há, contudo, ter em consideração que nem todos os alunos aprendem da mesma forma e que, contra todas as vantagens e potencialidades apontadas a este tipo de experiência, houve um aluno que não se sentiu tão à vontade, devido ao facto de ter uma baixa autoestima em relação a si mesmo e à matemática e ao seu percurso escolar, assim como considerar que não tem jeito para desenhar. Mesmo assim, a forma como os alunos se envolveram e viveram esta intervenção didática forteceleu a nossa convição de que este ambiente de aprendizagem é um momento de construção de conhecimento, essencial para desenvolver capacidades e competências matemáticas. É por isso, importante que eles ocorram de uma forma continuada e diversificada, de forma a promover aprendizagens significativas, promotoras do desenvolvimento do poder matemático dos alunos.

Foi bastante agradável, para nós, abordar o ensino da geometria com recurso da etnomatemática, tendo superado as expetativas em relação ao ambiente de trabalho criado nas aulas de matemática. Apesar de não ser um recurso educativo que resolva diretamente o problema do insucesso escolar nesta disciplina, este recurso contribuiu para criar um ambiente de trabalho propicio ao processo de ensino - aprendizagem da matemática e incutir o espirito crítico e cívico nos alunos. Foi também gratificante a forma como os alunos se relacionavam com as tarefas matemáticas propostas. Depois deste estudo, ficou-nos, mais reforçada, a ideia que a utilização da etnomatemática, nomeadamente a geometria *sona* na aprendizagem dos conceitos matemáticos, pode ajudar a criar atitudes positivas face a esta disciplina, contribuir para a sua apreciação. Acreditamos ser necessário rever as práticas pedagógicas e posturas no que concerne à matemática e que o professor deve procurar colocar e propor questões aos alunos que que estimulem a criatividade, a curiosidade e valorizem a cultura de diferentes grupos culturais que coabitam na escola atual. Consideramos que é preciso criar outras maneiras e formas de se trabalhar a matemática, construindo novos caminhos que a desmistifiquem, trabalhando, acima de tudo, de uma forma mais contextualizada, procurando uma integração maior com o dia a dia, com a cultura local, com outras disciplinas escolares, enfim, integradas com tudo o que se passa à nossa volta.

Esta experiência possibilitou-nos uma constante reflexão sobre a nossa atividade pedagógica, sobre os recursos disponíveis e sobre a importância do enquadramento das aprendizagens com os conhecimentos não formais e que envolvam aspetos sócio-culturais. Tendo a consciência de uma experiência ímpar proporcionada aos alunos, temos esperança que os conhecimentos e atitudes desenvolvidas perdurem e se fortaleçam ao longo da vida destes alunos. A implementação de uma abordagem etnomatemática surgiu, nesta investigação, não como um novo conteúdo ou contexto, mas como uma valorização do ambiente social e cultural dos alunos. Concordamos com Latas (2011) que refere que uma abordagem etnomatemática, em contexto de sala de aula, se torna exigente para o aluno e para o docente, dado supor um envolvimento cultural de ambos em ambientes que são familiares e não familiares. O docente, ao planificar o seu trabalho, deve ter consciência da necessidade de promover o estabelecimento de relações e realizar uma gestão curricular, agindo na interação entre o *background* e *foreground* dos seus alunos. Neste sentido, esta mesma autora considera que será necessário, por um lado, que alunos e docentes estejam cientes da existência matemática implícita nos conhecimentos adquiridos pelos alunos no seu contexto cultural e, por outro, sensibilizar os docentes para o papel que a matemática cultural pode desempenhar no desenvolvimento de capacidades matemáticas. A boa aceitação destas tarefas, por parte dos alunos, assim como da adesão e participação permitiu-nos que refletissemos sobre as mesmas, estimulando-nos a continuar com este tipo de prática pedagógica, para a qual não estavamos despertos. Partilhamos a opinião de Pires (2008) e de Latas (2011) que afirmam que lidar com a diversidade cultural nas salas de aula é um dos grandes desafios para o sistema educacional e para os docentes neste século e que é possível alcançar o sucesso escolar dos alunos se houver o reconhecimento que as experiências de aprendizagem que estes possuem são influenciadas pelas culturas provenientes de casa e da sua comunidade. Outro aspeto importante é ter consciência da existência da distância entre o conhecimento prévio que os alunos trazem para a escola com o conhecimento divulgado nos meios académicos e escolares (*ibidem*). Concordamos com Pires (2008) que refere que para que se possa ensinar de um modo efetivo, o docente tem que entender que as aprendizagens dos alunos depende das conexões e das ligações efetuadas com o conhecimento prévio que trazem para o sistema escolar, dado que o ensino é uma atividade inerente à atividade cultural da comunidade na qual o aluno interage. Por fim, este trabalho proporcionou-nos um conhecimento mais significativo dos vários documentos curriculares nacionais, mais concretamente do Programa de matemática do ensino básico (Ponte *et al*., 2007), tendo ficado mais atentos para a sua estrutura, finalidades, propósitos principais de ensino, objetivos, temas matemáticos e capacidades transversais, clarificou o significado e papel das metas de aprendizagem em matemática definidas para o ensino básico, promoveu o nosso aprofundamento do conhecimento matemático, didático e curricular, adequados para a preparação e lecionação do programa de matemática do ensino básico.

Referências biliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: ME- DEB. (Disponível em http://departamentos.esramada.pt/mat/3ciclo/matematica_na_educacao_basica.pdf Acesso em 03-05-2013)

Aguieiras, A. (2011). *Práticas profissionais promotoras de literacia científica*. Dissertação de Mestrado (não publicada). Lisboa: Universidade de Lisboa. (Disponível em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5480/1/ulfpie039781_tm.pdf. Acesso em 03-05-2013)

Agrupamento de Escolas Visconde de Juromenha (2009-2011). *Projecto Educativo*. *Mudar, Educar e Cooperar para melhor educar.* Tapada das Mercês: Agrupamento de Escolas Visconde de Juromenha. (Disponível em http://www.aevjuromenha.com/images/stories/food/PE.pdf. Acesso em 03-05-2013)

Almeida, J. C. (2001; 2005). *Em Defesa da Investigação-Acção*. In: *Sociologia.* nº 37, pp. 175-176 (Disponível em: http://www.scielo.oces.mctes.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0873-65292001000300010&lng=pt&nrm=iso Acesso em 05-05-2013)

Almeida, M. M. (2011) *Insucesso na matemática: as percepções dos alunos e as percepções dos professores.* Dissertação de mestrado em Supervisão e Coordenação da Educação. Porto: Universidade Portucalense Infante D. Henrique. (Disponível em http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/363/1/TME%20441.pdf. Acesso em 22-01-2013)

Araújo, E. (2004). *Etnomatemática com Geometria Sona. Despertando o pensamento matemático dos estudantes em sala de aula*. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis – SC. (trabalho de conclusão de curso)

Araujo, E. A. (1999). *Influência das habilidades e das atitudes em relação à matemática e à escolha profissional.*. Tese de Doutoramento. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas: Campinas.

Alves, A. I. D. M. (2008). *A supervisão pedagógica: da interação à construção de identidades profissionais - estudo de caso*. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Aberta. Lisboa: Universidade Aberta.

Banks, J. A. (1991). *Multicultural Literacy and Curriculum Reform*. In: *Educational Horizons*: Spring, 69, vol.3, pp. 135-140.

Banks, J. A. (1994). *An introduction to a multicultural education*. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Bardin, L. (1995; 2008). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Barbosa, R. M. (1993). *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos*. São Paulo: Atual.

Barbosa, A. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Dissertação de Doutoramento em Estudo da Criança- Área de Conhecimento em Matemática Elementar. Minho: Universidade do Minho. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10561/1/tese.pdf. Acesso 03-05-2013)

Bastos, R. (2006). *Notas sobre o Ensino da Geometria do Grupo de Trabalho de Geometria da APM – Simetria*. *Educação Matemática,* 88, pp. 9-11.

Bastos, R. (2007). *Notas sobre o ensino da Geometria*: *Transformações geométricas*. Educação e Matemática, 94, pp. 23-27.

Bello, S. E. L. (2004). *Etnomatemática e sua relação com a formação de professores: alguns elementos para discussão*. In Knijnik, G., Wanderer, F. & Oliveira, C. J. (Org.), Etnomatemática, Currículo e Formação de Professores, pp. 377-395. Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Benavente, A., Costa, A., & Machado, F. (1990). *Práticas de Mudança e de Investigação – Conhecimento e intervenção na escola primária*. Revista Crítica de Ciências Sociais, 29, pp. 55-80. (Disponível em: http://www.ces.uc.pt/publicacoes/rccs/029/ABenavente_at_al._pp.55-80.pdf. Acesso em 03-05-2013.)

Bellicanta, J. (2004). *As Simetrias na Matemática e na Biologia: os conceitos são os mesmos?*. Produção didático pedagógica na escola. Simetrias na Matemática e na Biologia. (Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2203-6.pdf Acesso em 05-05-2013)

Biembengut, M. S. & Hein, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Editora Contexto.

Biembengut, M. S. (2000). *Modelagem e Etnomatemática*: *Pontos (In)comuns*. In: Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática-CBEm 1, pp. 132-141. São Paulo: FE-USP.

Biembengut, M. S. (2012). *Perspectivas metodológicas em educação Matemática: um caminho pela modelagem e etnomatemática*. Caderno Pedagógico. v. 9, nº. 1, 2012, pp. 27-38.
(Disponível em: http://www.univates.br/revistas/index.php/cadped/article/viewArticle/322 Acesso em 03-05-2013)

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Boavida, A.; Paiva, A.; Cebola, G.; Vale, I.; Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no ensino básico- Programa de Formação Contínua para professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. (Disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/005_Brochura_experiencia_matematica.pdf Acesso em 03-05-2013)

Bodgan, R. & Taylor, S. J. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – Uma introdução à teoria e aos métodos.*Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Breda, A.; Serrazina, L.; Menezes, L.; Sousa, H. & Oliveira, O. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: DGIDC. (Disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/070_Brochura_Geometria.pdf Acesso em 03-05-103)

Cabrita, I. (1993). *Insucesso Escolar e Apoio Educativo*. In: Martins, A. & Cabrita, I. (Eds.). A Problemática do Insucesso Escolar (pp. 9-25). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Cabrita, I., Coelho, A., Vieira, C., Malta, E., Vizinho, I., Almeida, J., Gaspar, J., Pinheiro, J., Pinheiro, L., Nunes, M., Sousa, O. & Amaral, P. (2009). *Perspectivas e vivências emergentes em matemática – programas de formação contínua em matemática da Universidade de Aveiro com professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro.

Caldas, M. C. (2011). *A integração curricular das TIC: Estudo de Caso tomando como exemplo a geometria no Ensino básico*. Dissertação de Mestrado em Ciências da Educação – Área de especialização em Desenvolvimento Curricular. Braga: Universidade do Minho.
(Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/19040/1/Maria%20Clara%20da%20Silva%20Caldas.pdf Acesso em 03-05-2013)

Cardoso, C. M. (2005). *Educação Multicultural Percursos para práticas reflexivas*. Colecção Educação Hoje. Lisboa: Texto Editora.

Campos, E. (2006). O *Discurso de professores de prática de ensino e a perspetiva da etnomatemática*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC/SP
(Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/elza_silva_campos.pdf Acesso em 03-05-2013)

Campos, E.; Gomes, A.; Zaponi, M.; Dutra, P.; Molina, A.; Ferreira, H. & Feitona, R. (2011). *Aprender mais matemática. Ensino fundamental- anos finais*. Secretaria de Educação de Pernanbuco. Governo do estado
(Disponível em http://www.educacao.pe.gov.br/diretorio/aprender_mais/livro_aprender_mais_matematica_anos_finais.pdf Acesso em 05-05-2013)

Carmo, H. & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da Investigação – Guia para a Auto-Aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Chacón, I. M. (2003). *Matemática Emocional: Os Afectos na Aprendizagem Matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Chagas, E. (2003). *Educação Matemática na Sala de Aula: Problemáticas e Possíveis Soluções.* Educação, Ciências e Tecnologia. pp. 240- 248 (Disponível em www.ipv.pt/millenium/millenium29/31.pdf Acesso em 03-05-2013)

Chagas, I. (2005). *Caracterização da Investigação-acção.* [Online]. (Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ichagas/mi1/Anexo%20i.pdf. Acesso em 03-05-2013)

Coelho, J. (2008). *Sucesso ou insucesso na matemática no final da escolaridade obrigatória, eis a questão!*. In: Análise Psicológica. N.º 4, Vol. XXVI, pp. 663-678
(Disponível em: www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/aps/v26n4/v26n4a11.pdf Consulta em 03-05-2013)

Crato, N. (2006). *O Eduquês em Discurso Directo- Uma Crítica da Pedagogia Romântica e Construtivista*. Lisboa: Gradiva.

Cohen, L. & Manion, L. (1994). *Research Methods In Education* (4th ed.). London: Routledge.

Cohen, L.; Manion, L. & Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*,(5th edition) London: Routledge.

Cohen, L. & Manion, L. (1989; 2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla.

Cohen, L.; Manion, L.; & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th edition), London: Routledge.

Cortesão, L. & Stoer, S. (1994). *A possibilidade de "acontecer" formação: Potencialidades da investigação acção*. In: Estado actual da investigação em formação: Actas do colóquio (pp. 377-385). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Coutinho, C. (2005). *Percursos da investigação em Tecnologia Educativa em Portugal- uma abordagem temática e metodológica a publicações científicas* (1985-2000). Série – Monografias em Educação. Braga: CIED, Universidade do Minho.

Coutinho, C. (2007). T*ecnologia Educativa e Curriculo. Caminhos que se cruzam ou que se bifurcam?* Comunicação apresentada no VII Colóquio sobre questões Curriculares.

Costa, A., Dâmaso, A., Lima, A., Lima, C., Pacheco, C., Simões & C., Raposo, S. (2010). *Materiais de Apoio ao Novo Programa de Matemática*. *Geometria: Isometrias*. Comissão Regional de Acompanhamento do Programa de Matemática do Ensino Básico, Açores. (Disponível em http://www.edu.azores.gov.pt/pessoaldocente/formacao/documents/isometrias.pdf. Acesso em 03-05-2013)

Damásio, A. R. (1996). *O erro de Descartes: emoção, razão e o cérebro humano*. São Paulo: Companhia das Letras.

D'Ambrósio, U. (1990). *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e compreender*. São Paulo: Ática.

D'Ambrósio, U. (1993). *Etnomatemática. Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*, 2ª edição. São Paulo: Ed. Atual.

D'Ambrosio, U. (1985). *Ethnomathematics and its Place in the History and Philosophy of Mathematics*. For the Learning of Mathematics, 5(1), pp. 44-48.

D`Ambrósio, U. (1996). *Educação matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Papirus.

D'Ambrósio, U. (1998). *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer* (4.ª edição). São Paulo: Ática.

D'Ambrósio, U. (2001). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Coleção Tendências em Educação Matemática, 1. Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrósio, U. (2002). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade, 2ª ed.*. Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrósio, U. (2003). *Etnomatemática. Arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo: Ed. Ática.

D'Ambrósio, U. (2005). *Sociedade, cultura, matemática e seu ensino*. Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, pp. 99-120.

D'Ambrósio, U. (2006). *Etnomatemática e Educação*. In G. Knjnik, G.; Wanderer, F., &. Oliveira, C.J., (Org.). Etnomatemática: currículo e formação de professores. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, pp. 39-52.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação (p. 57 - 71).
(Disponível em http://esna.ccbi.com.pt/file.php/1/LivroCompetenciasEssenciais.pdf Acesso em 05-05-2013)

Delors, J. et. al. (1996). *Educação: um tesouro a descobrir – Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI*. 2ª ed. Colecções Perspectivas Actuais. Porto: Edições ASA.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2000). *The discipline and pratice of qualitative research*. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds), Handbook of qualitative research. London: Sage Publications.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (Orgs.) (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage.

Despacho nº 17169/2011. Publicado em Diário da Republica, 2.ª Série- N.º 245- 23 de Dezembro de 2011. (Disponível em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=31&fileName=Despacho_n___171692011_CNEB.pdf Acesso em 22-01-2013)

Diaz-Aguado, M. J. (2000). *Educação Intercultural e Aprendizagem Cooperativa*. Coleção: Ciências da educação- Século XXI. Porto: Porto Editora.

Dick, M. (2000). *The application of narrative Grid Interviews of phychological mobility research*. Fórum: Qualitative social research, 1(2).
(Retirado em URL: www.qualitative-research.net/fqs-texte/2-00/2-00dick-e.htm Acesso em 03-05-2013)

Doyle, W. (1988). *Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction*. Educational Psychologist, 23, pp. 167-180

Ernest, P. (2000). *Teaching and learning mathematics*. In: Koshy, V., Ernest, P. &, Casey, R. (eds), Mathematics for Primary Teachers. London: Routledge.

Erickson, F. (1988). *Métodos cualitativos de investigación sobre la ensenanza*. In: Wittrock, M. C. La investigación de la ensenanza. II: Metodos cualitativos y observación. Buenos Aires: Piados. pp. 195-299.

Estrela, A. (1994). *Teoria e prática de observação de classes. Uma estratégia de formação de professores*. Porto: Porto Editora.

Evangelista, M. (2011). *As transformações isométricas no geogebra com a motivação etnomatemática*. Dissertação de mestrado. Mestrado profissional em Ensino de Matemática. São Paulo: PUC-SP. (Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/mitchell_evangelista.pdf Acesso em 03-05-2013)

Fernandes, E. (2004). *Aprender Matemática para Viver e Trabalhar no Nosso Mundo*. Tese de Doutoramento. Departamento de Educação. Lisboa: Faculdade de Ciências. (Disponível em http://cee.uma.pt/people/faculty/elsa.fernandes/artigos/Tese%20EMdSF.pdf Acesso em 05-05-2013)

Fernandes, D. (2005). A*valiação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas*. Cacém: Texto Editores.

Ferreira, E. Sebastiani. (1997). *Etnomatemática: Uma proposta metodológica*. Serie Reflexão em Educação matemática. V. 3, Rio de Janeiro: Universidade Santa Ursula.

Ferreira, E. (2005). *Ensino e aprendizagem de geometria em ambientes geométricos dinâmicos: o tema de geometria do plano no 9º. Ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado em Educação- Área de especialização em supervisão pedagógica em Ensino da Matemática- Braga: Universidade do Minho. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/4920/1/dissertacao2.pdf Acesso em 03-05-2013)

Ferreira, M. M. (2003). *Educação Intercultural*. Lisboa: Universidade Aberta.

GAVE (2004). *Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação da Literacia Matemática*. Lisboa: GAVE. (Disponível em http://www.projavi.mec.pt/np4/%7B$clientServletPath%7D/?newsId=34&fileName=1D3_conceitos_fundamentais_avaliacao_pis.pdf Acesso em 03-05-2013)

GAVE (2004). *PISA 2003 – Resultados do estudo internacional*. Lisboa: GAVE

Geddes D. *et al* (2001). *Geometria nos 2º e 3º ciclos*. *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*, Colecção de Adendas, Anos de Escolaridade 5-8. Lisboa: APM.

Gerdes, P. (1991). *Etnomatemática: Cultura, matemática, educação*. Maputo: Instituto Superior Pedagógico.

Gerdes, P. (1994). *Sona Geometry: Reflections on the tradition of sand drawings in Africa South of the equator*. Maputo: Instituto Superior Pedagógico, vol. 1.

Gerdes, P. (1996). *Etnomatemática e educação matemática: uma panorâmica geral.* In: *Quadrante*, *Revista* Teórica e de Investigação, Vol. 5, n.º 2, pp. 105-138.

Gerdes, P. (1997). Vivendo a matemática: desenhos da África. 3ª ed. São Paulo: Scipione.

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática: Reflexões sobre Matemática e Diversidade Cultural*. Edições Húmus: Ribeirão. (Prefácio: Jaime Carvalho e Silva, Universidade de Coimbra, Portugal)

Gerdes, P. (2008). *Geometria Sona de Angola: Matemática duma Tradição Africana*, Lulu: Morrisville NC. (Prefácio: Arthur B. Powell, Universidade Rutgers, Newark, Estados Unidos da América) [Primeira edição: Universidade Pedagógica, Maputo, 1993]

Godino, J. D. (Director) (2004). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Disponível http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf Acesso em 03-05-2013)

Godino, J. D. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

(Disponível em http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf Acesso em 03-05-2013)

Goetz, J. & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in Educational Research*. New York: Academic Press

Goetz, J. & LeCompte, M. (1988). *Etnografia y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Gontijo, C. H. (2007). *Criatividade em Matemática: um olhar sob a Perspectiva de Sistemas*. In: *ZETETIKÉ*, v. 15, n.º 28, pp. 153-172, jul./dez., 2007.

Gutierrez, A. R. & Jaime Pastor, A. (1996). *El grupo de las isometrias del plano*. Madrid: Editorial Sintesis S.A.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do Ensino básico e Secundário*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

ICMI Study (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century***.** Em Mammana, C. e Villani, V. (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 337-345). Londres: Kluwer.

Igea, D.; Agustin, J.; Beltrán, A.; & Martin, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson.

Jahn, A. P. (1998). *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles: étude d´une séquence d´enseignement avec cabri- géométre*.Tese de doutoramento. Université Joseph Fourier: Grenoble.

Knijnik, G. (1997). *Alfabetização matemática e as atividades produtivas.* In: Alfabetização e Cidadania: Educação Matemática de Jovens e Adultos. São Paulo: RAAB, n. 6, pp. 25-34.

Knijnik, G. (2001). *Educação Matemática, Exclusão Social e Política do Conhecimento*. In: *Bolema Boletim de Educação Matemática*, ano 14, nº 16.

Knijnik, G. (2004). *Itinerários da etnomatemática: questões e desafios sobre o cultural, o social e o político na educação matemática*. In: Knijnik, G.; Wanderer, F.; Oliveira, C. J. Etnomatemática: currículo e formação de professores. pp. 19-38. Santa Cruz do Sul: Edunisc.

Knijnik, G. (2006). *Educação matemática, culturas e o conhecimento na luta pela terra*. Santa Cruz do Sul: Edunisc

Lakatos, E. M. & Marconi, M. A. (1990). *Fundamentos de metodologia científica*. São Paulo: Editora Atlas S.A.

Latas, J. & Moreira, D. (2011). *Uma abordagem etnomatemática em contexto de sala de aula*. In CIAEM- XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011. Brasil: Recife (Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1110/608 4 Acesso em 03-05-2013)

Latorre, A. (2003; 2008). La *Investigación- Acción*. *Conocer y cambiar la practica educativa*. Barcelona: Graó.

Lima, F.; Sílva, M. & Melo, E. (2011). *Alguns pressupostos teóricos da etnomatemática na educação: os desafios e os avanços. In*: CIAEM- XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. 2011. Brasil: Recife
(Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1948/614 Acesso em 03-05-2013)

Libâneo, J. C. (2001*). Organização e gestão escolar: teoria e prática*, 4.ª ed. Goiania: Editora Alternativa.

Lessard Hébert, M. (1996). *Pesquisa em Educação.* Lisboa: Instituto Piaget.

Lopes, M. L. & Nasser, L. (1996; 1997). *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ

Ludke, M. & André, M. (1986). *Pesquisa em educação***:** abordagens qualitativas. Lisboa: Editora Pedagógica e Universitária, Ltda.

Malheiro, M. (2003). *Educação Intercultural*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. (1991). *Computadores na Educação Matemática: alguns aspectos para reflexão*. Revista Noesis, nº 21, pp. 35-36

Matos, L. (2011). *Abordagem das rotações centrada nos padrões: um estudo de caso com alunos do 9º ano*. Dissertação de Mestrado (não publicada). Universidade de Aveiro.
(Disponível em https://ria.ua.pt/bitstream/10773/8539/1/248013.pdf Acesso em 03-05-2013)

Matos, J. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). *Visualização espacial: algumas actividades*. Educação e Matemática, 26, pp. 13-17

Matos, J. M. (2004). *As aprendizagens matemáticas dos alunos portugueses*. Universidade Nova de Lisboa. (Texto base da conferência realizada na Escola Superior de Educação de Lisboa).

Máximo- Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da Investigação-Acção*. Colecção Infância. Porto: Porto Editora.

Melo, T.; Fantinato, M.; Cecília; T., A.; Silveira, A. e Soares, G. (2011). *O programa etnomatemática como humanizador do ensino da matemática*. In: XIII CIAEM-IACME, 2011. Brasil: Recife (Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1376/1092
Acesso em 03-05-2013)

Mendes, I. A. (2006). *Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do tempo

ME (1991). *O Programa de Matemática (5º e 6º anos)*. Oficinas gráficas da Imprensa Nacional – Casa da Moeda, E. P.

ME (1991). *Programa de Matemática (Plano de organização do ensino-aprendizagem)*. Direcção do Ensino Básico e Secundário.

ME- DGIDC. (2010). *Metas de Aprendizagem*. Lisboa: ME-DGIDC.

ME (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: ME-DEB

ME (2004). *Resultados do Estudo internacional PISA 2003*. Lisboa: Gabinete de avaliação educacional do Ministério da Educação. (Disponível em http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=relatorio_nacional_pisa2003.pdf Acesso 03-05-2013)

ME – DEB (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Merriam, S. B. (1988). *Case* study *research in education. A qualitative approach*. San francisco, CA: Jossey - Bass Publischers.

Miranda, F. B. (2004). *Educação Intercultural e formação de professores*. Porto: Porto Editora.

Mourão, A. & Almeida, L. (1993). *Factores Pessoais e Situacionais do Rendimento na Matemática: Contornos de um projecto de investigação-acção junto de alunos do 7º ano de escolaridade*. In: Almeida, L. (coor.). Factores Pessoais e Situacionais do Rendimento na Matemática: Avaliação e Intervenção. Braga: Serviço de Educação da Fundação Calouste Gulbenkian.

McLeod, D. B. (1992). *Research on affect in mathematics education: a reconceptualization*. In Douglas A. Grouws (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. (pp. 575-596). New York: MacMillan.

Moll, L. C. & Greenberg, J. B. (1990). *Creating zones of possibilities: combining social contexts*. In: Moll, L. C. (Ed.). Vygotsky and Education*:* Instructional Implications and Applications of Sociohistorical Psychology. pp. 319-348. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Monteiro, A. (1998). *Etnomatemática: as possibilidades pedagógicas num curso de alfebatização para trabalhadores rurais assentados*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas.

Monteiro, A.; Orey, D. & Domite, M.S.C. (org) (2004). *Etnomatemática: papel, valor e significado*. In: Ribeiro, J, P.; Domite, M. C. S. ; Ferreira, R. (org). Etnomatemática: papel, valor e significado. São Paulo: Zouk.

Monteiro, A. & Pompeu Jr, G. (2001). *A matemática e os temas transversais*. São Paulo: Editora Moderna.

Moreira, M. A. (1999). *A teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget*. In: Teorias de Aprendizagem, Marco António Moreira. São Paulo: EPU.

Moreira, M. A. (2000). *Aprendizagem significativa crítica*. Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa. Lisboa (Peniche).

Moreira, D. (2002), *Contas da Vida: Interacção de saberes num Bairro de Lisboa*. Tese de Doutoramento em Antropologia Social. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Moreira, D. (2004). *Texto Matemático e Interacções*. In: Knijnik, G.; Wanderer, F. & Oliveira, C. J.(2004). Etnomatemática, currículo e formação de professores. pp. 89-108. Santa Cruz do Sul: EDUNISC

Nasser, L. (Coord.); Sant'anna, N. F. P. (2000). *Geometria segundo a teoria de van Hiele.* Rio de Janeiro: Projeto Fundão IM/UFRJ.

NCTM (1991; 1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000; 2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM

Neves, M. C. & Carvalho, C. (2006). *A importância da afectividade na aprendizagem da matemática em contexto escolar: Um estudo de caso com alunos do 8.º ano*. In: Análise Psicológica, XXIV, 2, pp. 201-215. (Disponível em http://publicacoes.ispa.pt/index.php/ap/article/view/164/pdf Acesso em 05-05-2013)

Neto, F. (2007). *Atitudes em relação à diversidade cultural: implicações psicopedagógicas*. In: Revista Portuguesa de Pedagogia, vol. 41, n.º1, pp. 5-22 (Disponível em www.*iduc.uc.pt/index.php/rppedagogia/article/download/1182/630* Acesso em 03-05-2013)

OCDE (2006). *Regards sur l´Éducation 2006: Les grandes lignes*. Organisation de Coopération et de Développement Économiques. (Disponível em http://www.oecd.org/fr/education/apprendre-au-dela-de-l-ecole/37376131.pdf Acesso em 05-05-2013)

Oliveira, A. (1996). *Atribuições causais e expectativas de controlo do desempenho na Matemática*. Tese de doutoramento. Braga: Universidade do Minho.

Oliveira C. C.de. (2006). *Avaliação em educação matemática:o olhar do etnomatemática*. In: Ribeiro, J. P. M. ; Domite, M. do C. S.& Ferreira, R. Etnomatemática: papel valor e significado

Ouellet, F. (1991). *L'Éducation interculturelle: essai sur le contenu de la formation des maîtres.* Paris: Éditions Harmattan.

Ouellet, F. (2002). *Les Défis du pluralisme en éducation. Essais sur la formation interculturelle,* Sainte-Foy, Presses de l'université Laval-Paris, L'Harmattan.

Oliveira, S. (2008). *Concepção, desenvolvimento e avaliação de um ambiente virtual de aprendizagem para a língua inglesa – blogue com podcasts.* Dissertação de Mestrado (não publicada). Lisboa: Universidade Católica Portuguesa. (Disponível em http://dited.bn.pt/31641/2628/3218.pdf Acesso em 22-05- 2012)

Oliveira, C. (2010) *O Quadro Interactivo Multimédia no ensino/aprendizagem da matemática.* Dissertação de Mestrado da Universidade Portucalense Infante D. Henrique. Departamento de Ciências de Educação e Património. (Disponível em http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/366/1/TME%20446.pdf Acesso em 22-01-2013)

Pajares, M. (1992). *Teachers´Beliefs and Educational Research: Cleanning Up a Messy Construct*. In: Review of Educational Research, 62, nº 3, pp. 307-333

Pardal, L. & Correia, E. (1995). *Métodos e Técnicas de investigação social*. Porto: Areal Editores.

Patton, M. (1990). *Qualitative evaluation and research methods (2nd ed.).* Newbury Park, CA: Sage Publications.

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods (3º ed)*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Passos, C. & Araújo, J. (s/d). *Possíveis articulações entre Etnomatemática e Educação Matemática Critica*. [online]
(Disponível em http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/07-03.pdf Acesso em 20-01-2013)

Pedro, A., Pires, L. & Gonçalez, R. (2007). *Contributos na construção de uma sociedade pluralista e democrática numa perspectiva comparada – Portugal e Espanha*. [online] (Disponível em http://ria.ua.pt/bitstream/10773/7259/1/Contributos%20da%20educa%C3%A7%C3%A3o%20intercultural.pdf Acesso 03-05-2013)

Perrenoud., Ph. (1999). *Construir competências é virar costas aos saberes?* In: Pátio. Revista Pedagógica, n.° 11, 1999, pp. 15-19. (Disponível em http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1999/1999_39.html Acesso em 03-05-2013)

Pinto, S. (2007). *As representações dos professores no diálogo de culturas nas escolas: estudo de caso: os professores do 1º ciclo de um agrupamento de escola do concelho de Paredes* – Dissertação de mestrado. Universidade Portucalense- Infante D. Henrique
(Disponível em http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/115/1/TME%20343.pdf Acesso em 22-01-2013)

Pires, E. (2008). *Um estudo de etnomatemática: a matemática praticada pelos pedreiros*. Mestrado em Ensino das Ciências. Especialidade de Ensino da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta. (Disponível em https://repositorioaberto.uab.pt/bitstream/10400.2/1359/1/U.A.-A%20Matem%C3%A1tica%20Praticada%20pelos%20Pedreiros-Eug%C3%A9nia%20Pardal.pdf Acesso 03-05-2013)

PISA (2003). *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação da resolução de problemas*. OCDE. Lisboa: ME-GAVE. (Disponível em http://www.projavi.mec.pt/np4/%7B$clientServletPath%7D/?newsId=34&fileName=1D3_conceitos_fundamentais_avaliacao_pis.pdf Acesso em 03-05-2013)

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Meneses, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). *Didática da matemática no 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. (1992). *Concepções dos professores de Matemática e processos de formação*. In: Brown, M., Fernandes, D., Matos, J. e Ponte, J. (Eds.). Educação e matemática: Temas de investigação. Lisboa: IIE e Secção de Educação e Matemática da SPCE.

Ponte, J. P. (1994). *Matemática. Uma disciplina condenada ao insucesso?* In: *NOESIS*, n.º 31, pp. 24-26. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. (Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm Acesso em 03-05-2013)

Ponte, J. P. (2002). *Investigar a nossa própria prática*. In: GTI (Org.), Reflectir e investigar sobre a prática profissional, pp. 5-28. Lisboa: APM

Ponte, J. P. (2003). *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal*. *Investigar em Educação, 2*, pp. 93-169

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In: GTI (ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM. (Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm Acesso em 03-05-2013)

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (1992). *Manual de investigação em ciências sociais.* Lisboa: Gradiva.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (1998). *Manual de investigação em ciências sociais*. 2ª edição. col. Trajectos: nº 17. Lisboa: Gradiva. (Disponível em http://pt.scribd.com/doc/7011379/Raynond-Quivy-Luc-Van-Campenhoudt-Manual-de-InvestigaCAo-Em-CiEncias-Sociais Acesso em 03-05-2013)

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (2005). *Manual de Investigação em Ciências Sociais* (2.º edição). Lisboa: Gradiva. (Disponível em http://pt.scribd.com/doc/37937019/Quivy-e-Campenhoudt-Manual-de-Investigacao-em-Ciencias-Sociais Acesso em 03-05-2013)

Quintas, S. F. (1998). *Las Técnicas de Grupo en la Animación Comunitária,* 1ª edicion. Salamanca: Amarú Ediciones.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática.* Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Rosa, M. & Orey, D. (2006). *Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando um caminho para a ação pedagógica*. In: BOLEMA, Rio Claro, v. 19, n. 26 (2006), pp.1-26 (Disponível em *http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1851/1612* Acesso em 03-05-2013)

Rosa, M. & Orey, D. (2011). (*Co) influências etnomatemáticas em salas de aula com diversidade cultural*. In: *CIAEM, XIII* Conferência Interamericana de educação matemática, 13, 2011 (Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/199/60 Acesso em 03-05-2013)

Sanches, I. (2005). *Compreender, agir, mudar, incluir. Da investigação-acção à educação inclusiva*. In: Revista Lusófona de Educação, 2005, 5. pp. 127-142 (Disponível em http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/rle/n5/n5a07.pdf Acesso em 03-05-2013)

Santos, E. (2002). *A etnomatemática e suas possibilidades pedagógicas: algumas indicações pautadas numa professora e em seus alunos e alunas numa 5.ª série*. Dissertação de mestrado. São Paulo: FE/USP.

Santos, L. (2003). *A avaliação em documentos orientadores para o ensino da Matemática: Uma análise sucinta*. In: Quadrante, vol. XII (1), pp. 7-20. (Disponível em http://area.fc.ul.pt/pt/artigos%20publicados%20nacionais/D.pdf Acesso em 03-05-2013)

Santos, E.; Morais, C. & Paiva, J. (2004) – *Formação de Professores para a Integração das TIC no Ensino da Matemática – Um Estudo na Região Autónoma da Madeira*, 6º Simpósio Internacional de Informática Educativa, Cáceres, 2004.

Saint-Georges, P. de. (1997). *Pesquisa e crítica das fontes de documentação nos domínios económicos, social e político*. In: Albarello, Luc et al. Práticas e Métodos de Investigação em Ciências Sociais. pp. 15-47. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda.

Pérez Serrano, G. (Coord.) (2000). *Modelos de Investigación Cualitativa en Educación Social y Animación Sociocultural – Aplicaciones Prácticas*. Madrid: Narcea.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2005). *O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática*. In: GTI (Ed). O professor e o desenvolvimento curricular, ed. Grupo de Trabalho de Investigação-GTI, pp. 35 - 62. Lisboa: APM

Sebastiani Ferreira, E. (2004). *Os índios waimiri-atroari e a etnomatemática*. In: Knijnik, G. et al. (Org.). Etnomatemática, currículo e formação. Santa Cruz do Sul: EDUNISC.

Smith, C. P. (2000). *Content Analysis and narrative analysis*. In : Reis, H.T. & Judd, C. M. (Orgs). Handbook of Research Methods in social and personality psychology, pp. 313-335. Cambridge: Cambridge University Press.

Schmitz, C. C. (2004). *Caracterizando a matemática escolar*. In: Knijnik, G.; Wanderer, F.; Oliveira, C. J. Etnomatemática: currículo e formação de professores. Santa Cruz do Sul: EDUNISCS.

Stein, M. H. & Smith, M. S. (1998). *Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática*. In: Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4).

Sousa, G. C. & Pereira, M. I. C. (2010). *Etnomatemática: conceito e aplicações.* In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 2010 (Disponível em *http://www.moodle.ufba.br/file.php/11468/etnomatematica/T22_CC1042.pdf* Acesso em 03-05-2013)

Scandiuzzi, P. P. (2003). *A história da geometria não contada na escola.* Pacific Resources for Education and Learning. (Disponível em http://www.ethnomath.org/resources/brazil/historia-da-geometria.pdf Acesso em 03-05-2013)

Stoer, S. & Cortesão, L. (1999). *Levantando a Pedra. Da Pedagogia inter/multicultural às Práticas Políticas Educativas numa Época de Transnacionalização*. Porto: Edições Afrontamento.

Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação. Como conceber e realizar o processo de investigação em Educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Tuckman, B. (2002). *Manual de investigação em educação- Como conceber e realizar o processo de investigação em educação* (2ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Trilla. J. (1998). *La Educación Fuera de la Escuela: ámbitos no formales educación social, 3ª ed.* Barcelona: Editorial Ariel.

Trilla, J. (coord.). (2004). *Animação Sociocultural. Teorias Programas e Âmbitos*. Lisboa: Instituto Piaget.

Vale, I. (2000). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial de professores num contexto de resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro. Lisboa: APM.

Vale, I. (2004). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial de Professores num contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Perez, V. J. Ventosa (1996). *La Expressión Dramática como medio de Animación en Educación Social- Fundamentos, Técnicas e Recursos*. Salamanca: Amarú Ediciones.

Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J. P. & Abrantes, P. (Orgs.) (1999), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*. Lisboa: DEFCUL.

Velosa, R. (2008). *A aprendizagem da geometria com recurso aos materiais manipuláveis no 7º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado. Madeira: Universidade da Madeira.
(Disponível em http://digituma.uma.pt/handle/10400.13/216 Acesso em 02-05-2013)

Vergani, T. (2000). *Educação Etnomatemática: o que é?* Lisboa: Pandora Edições.

Viana, O. (2004). *As atitudes dos alunos do ensino médio em relação à geometria: adaptação e validação de escala*. In: VIII encontro Nacional de Educação matemática, 2004, Recife (Disponível em http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/CC00596629800.pdf Acesso em 03-05-2012)

Vieira, A. (2006). *O contributo da literatura infantil para a educação intercultural- experiência em contexto de sala de aula*. Dissertação de mestrado em Relações interculturais. Lisboa: Universidade Aberta. (Disponível em https://repositorioaberto.uab.pt/bitstream/10400.2/639/1/LC165.pdf Acesso em 03-05-2013)

Vilela, V. (2008). *O lúdico como instrumento de aprendizagem no ensino da matemática.* Universidade Federal de Goias. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Goiás.
(Disponível em http://ppge.fe.ufg.br/uploads/6/original_Dissert-%20Vera.pdf Acesso em 05-05-2013)

Wenger, E. (1998). *Communities of pratice: Learning. Meaning and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Yin, R. (1989). *Case study research. Design and methods*. Newbury Park CA: Sage Publishing.

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods* (2ª Ed). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Anexos

Anexo 01 - Autorização da escola para a realização da sequência didática

Autorização da escola para a realização da sequência didática

Para: Exma Diretora da Escola Básica 2, 3
Visconde de Juromenha

Assunto: Autorização para realização de uma sequência didática na escola para posterior recolha e tratamento de dados assim como a autorização da identificação da escola e sua caraterização e dos alunos do 9º1, na dissertação de mestrado da docente.

Eu, Elisabete Marinho Dias, docente de quadro-escola da Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha, do grupo 500, venho por este meio, pedir autorização para realizar junto dos alunos da turma 1 do nono ano de escolaridade desta escola, uma sequência didática, do qual sou docente de Matemática, de Formação Cívica e Diretora de Turma, para posterior recolha e tratamento de dados, enquadrado no Mestrado em Didática da Matemática, pela Universidade de Aveiro, da qual me encontro a realizar no presente ano letivo.

A sequência didática a desenvolver junto dos alunos é sobre um conteúdo/tema lecionado no 9ºano, contemplado no programa Oficial de Matemática do 9ºano, denominado "Rotações e outras isometrias" com duração prevista de 7 blocos, com motivação da geometria Sona e recurso à etnomatemática. Os objetivos principais desta sequência didática são de averiguar se haverá contributos efetivos das atividades que explorem aspetos sócio-culturais da Matemática para o desenvolvimento conceptual; Haverá contributos efetivos das atividades que explorem aspetos sócio-culturais da Matemática para o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina? De que modo se estabelece a relação entre as tarefas com contexto sócio-culturais e a motivação para a realização de atividades matemáticas?

Igualmente, peço autorização para identificar a escola onde decorrerá a investigação e a sua caraterização, assim como dos alunos do 9.º1, na dissertação do mestrado que apresentarei e defenderei em público na Universidade de Aveiro, no presente ano letivo.

Sem mais nenhum assunto a tratar, agradeço a compreensão e colaboração prestada.

Tapada das Mercês, 22 de Fevereiro de 2012

A docente:

____

(Elisabete Dias)

Anexo 02- Pedido de autorização aos Encarregados de educação

Pedido de Autorização do Encarregado de Educação da turma 9º1

A docente de Matemática, vem por este meio, informar que se encontra, neste ano letivo, a realizar Mestrado em Didática da Matemática, pelo que desenvolverá junto do seu educando do 9.º1, uma sequência didática, sobre um conteúdo/tema matemático denominado de "Rotações e outras isometrias" constante do programa Oficial de Matemática do 9.ºano, emanado do Ministério da Educação, sem prejuízo para os alunos, que será depois alvo de recolha de dados e tratamento dos mesmos, pela docente para incluir na sua dissertação de mestrado. A investigação que a docente se encontra a realizar tem por objetivo verificar se a estratégia/recurso utilizado por si contribuirá para uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos lecionados, se contribui para a apreciação da matemática, se motiva os alunos para a realização de exercícios matemáticos, se desperta interesse pela disciplina, se contribui para uma visão mais humana e prática da matemática, etc…, pois é do conhecimento público que a matemática é a disciplina com maior insucesso escolar e por isso, a docente preocupada com esta realidade, propõe-se a utilizar um recurso/estratégia para melhorar o processo de ensino-aprendizagem.

Para tal a docente precisa que o Encarregado de Educação tome conhecimento da realização dessa sequência didática, da qual precisará de recolher dados (tais como fichas de trabalho realizadas pelos alunos, o teste diagnóstico realizado pelos discentes, teste final de avaliação, notas da docente, questionário realizado aos alunos, entrevista semi-estruturada da turma,….) que serão depois analisados pela mesma para tirar conclusões do sucesso ou do insucesso da implementação da estratégia usada. Caso a docente necessite de realizar uma entrevista semi-estruturada na turma, a docente, pede, igualmente, autorização para gravar a mesma, pois não conseguirá apontar e anotar todo o diálogo estabelecido entre si e os alunos, sendo importante reproduzir tudo o que os alunos disserem sobre as atividades realizadas.

Tapada das Mercês, 22 de Fevereiro de 2012

A docente:

____

O Encarregado de Educação do aluno _____________________________________, da turma 9º1, autoriza a recolha dos dados recolhidos pela docente de Matemática durante a realização da sequência didática, a decorrer no mês de Março de 2012, na Escola Básica 2,3 Visconde de Juromenha, assim como a gravação de entrevista semi-estruturada na turma, caso seja necessário.

Data: ______/______/2012

Assinatura:

____

Anexo 03- Desafio final

Desafio final

Tenho um desafio a propor-te**: Inventa** um desenho sona em que:

1- Ao desenhares não levantas uma única vez o lápis ou caneta;
2- Não passas duas vezes pela mesma linha;
3- Contenha pelo menos uma isometria;
4- Seja original.

Além de contar para a nota da disciplina, os melhores desenhos serão expostos na escola.
Critérios de seleção:

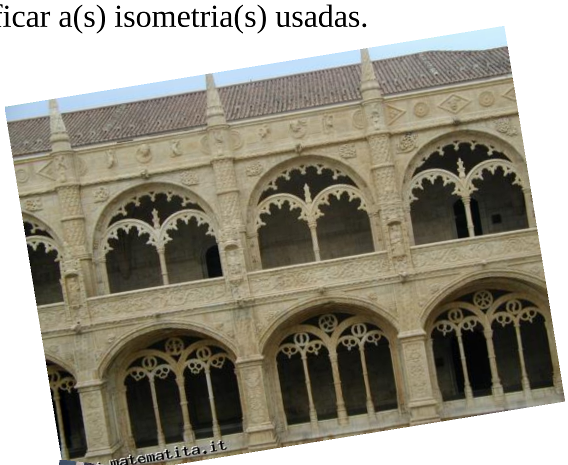
Critérios de avaliação	**Pontuação**
Criatividade	10
Originalidade	10
Obedeça às condições pedidas	70
Dificuldade da sua execução	10

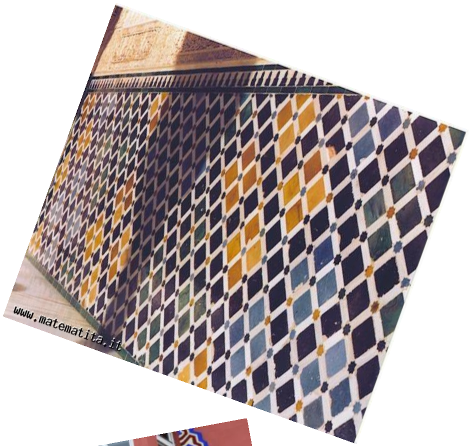
Data de entrega: Próxima aula de Formação Cívica

Anexo 04- Concurso de fotografia

CONCURSO "FOTO COM SIMETRIA"

Procura, na tua região, em paisagens, fachadas de monumentos ou prédios, pormenores em igrejas ou monumentos, calçadas, painéis ou outros, exemplos de isometrias e fotografa-as. Poderás organizar-te em grupo, uma exposição de fotografias com o tema: "Isometrias na nossa terra". A cada fotografia podes associar um texto e identificar a(s) isometria(s) usadas.





Podes investigar, o que são:

- ✓ **Frisos;**
- ✓ **Rosáceas;**
- ✓ **Pavimentações;**
- ✓ **Pavimentações de Escher**

Podes consultar os sites:

Pavimentações: http://illuminations.nctm.org/ActiviityDetail.aspx?ID=202
Isometrias: www.atractor.pt
Vida e obra de Escher: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/Escher.htm
Escher e as pavimentações: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2001/icm21/pavimentações.htm

Anexo 05- Ficha de trabalho sobre isometria e simetria

Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha

Ano letivo 2011/2012

Disciplina: Matemática- 9ºano

Data: Março de 2012 Docente: Elisabete Dias

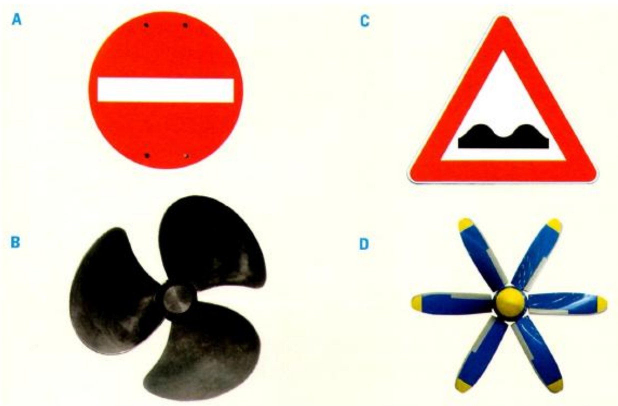
Ficha de trabalho sobre **Isometrias e simetrias**

Nome:____Turma:_____Número:___

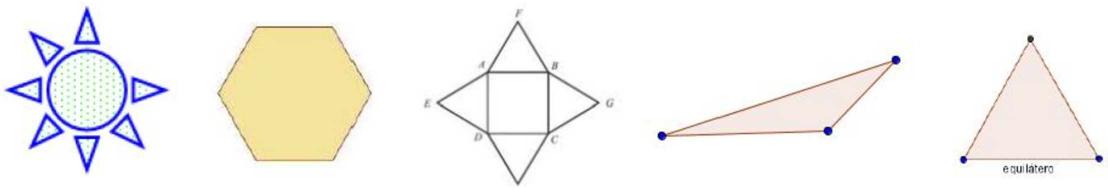
Considera-se que uma figura tem **simetria** quando, sujeita a uma transformação, fica invariante, isto é, a figura que se obtém coincide com a figura inicial. As transformações que vamos considerar são:

- reflexão segundo um eixo – **simetria de reflexão**
- rotação com centro em um ponto da figura e com uma determinada amplitude – **simetria de rotação**

1. Descreve as simetrias que apresentam as seguintes imagens.



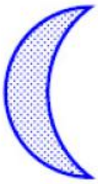
2. Desenha em cada um dos polígonos todos os seus eixos de simetria (caso existam).



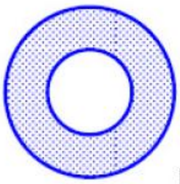
(Continuação da ficha de isometria e simetria)

3. Para cada uma das figuras seguintes, identifica as simetrias de rotação:

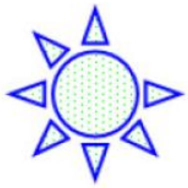
4. Em baixo estão as seguintes figuras:



A



B



C

E

D

F

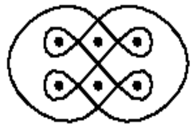
Sempre que existam,

a) regista as simetrias de rotação de cada uma das figuras.
b) desenha os eixos de simetria de cada uma das figuras.

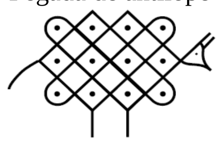
Anexo 06- Ficha de apoio ponteada"Geometria *Sona*"

Geometria *Sona*

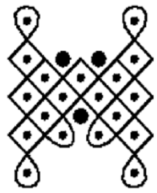
Nome:____Nº:_______ Turma: 9º1



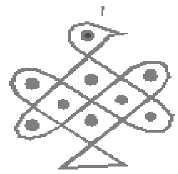
Pegada de antílope



antílope



O galo e o chacal (fábula)



Ave

Anexo 07- Ficha de apoio sobre isometrias e simetrias

Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha

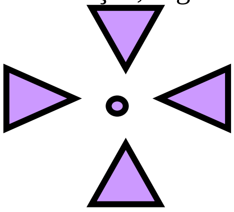
Ano letivo 2011/2012 — Disciplina: Matemática- 9ºano

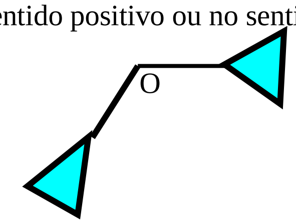
Data: Fevereiro/Março de 2012 — Docente: Elisabete Dias

Ficha de apoio sobre **Isometrias e simetrias**

Nome:____**Turma:**_____ **Número:**___

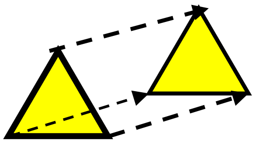
Rotação
Todos os pontos do transformado são obtidos rodando a figura inicial em torno de um ponto fixo, o centro de rotação, segundo um ângulo orientado no sentido positivo ou no sentido negativo.

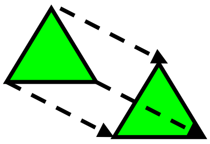


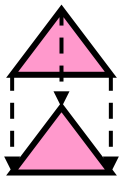


Neste caso, temos uma rotação de centro O e de amplitude 120º (no sentido negativo)

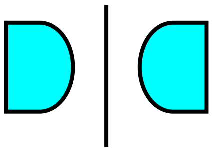
Translação
Numa translação todos os pontos da figura original são transformados noutros pontos segundo a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma distância (vetor).

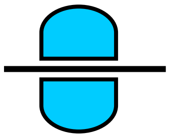


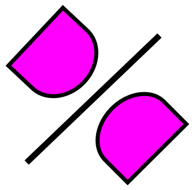




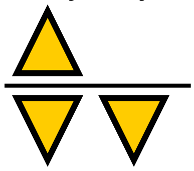
Reflexão
Cada ponto da figura original e o correspondente da figura transformada estão sobre uma reta perpendicular ao eixo de reflexão e igual distância desse eixo.

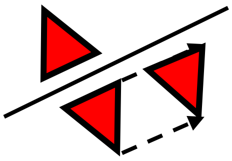






Reflexão deslizante
é o resultado de uma reflexão seguida de translação cujo vetor é paralelo ao eixo de reflexão.





(continuação da ficha de apoio)

Que propriedades têm em comum estas transformações?

Uma isometria (iso=igual; metria=medição) é uma transformação geométrica que mantém as ______________________________ entre pontos e as ______________________ dos ângulos, transformando figuras noutras figuras ____________________________________.

Resumo:
Reflexões, rotações, reflexões deslizantes e translações são transformações do plano denominadas por **isometrias**.

Nas isometrias, a figura e o seu transformado são simetricamente iguais, isto é, apresentam lados correspondentes com o mesmo comprimento e ângulos correspondentes com a mesma amplitude.

Na **reflexão** o ponto e o seu transformado:
- ficam à mesma distância do eixo de simetria;
- definem segmentos de reta que são perpendiculares ao eixo de simetria.

Na **translação** o ponto e o seu transformado definem segmentos de reta com:
- a mesma direção;
- o mesmo sentido;
- o mesmo comprimento.

Na **rotação** o ponto e o seu transformado:
estão à mesma distância do centro de rotação (ponto fixo);
- definem um ângulo com vértice no centro de rotação e amplitude igual à amplitude de rotação e sentido previamente definido;
- o mesmo sentido de rotação (positivo ou negativo).

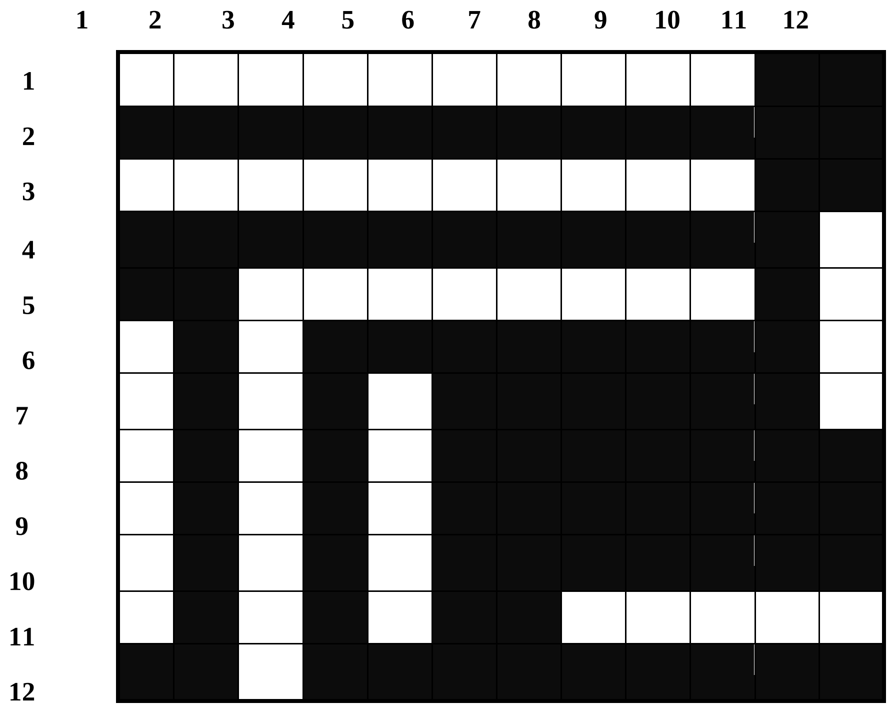
Na **reflexão deslizante**, a figura e o seu transformado:
- têm o mesmo comprimento;
- a mesma amplitude dos ângulos;

Considera-se que uma figura tem **simetria** quando, sujeita a uma transformação, fica invariante, isto é, a figura que se obtém coincide com a figura inicial. As transformações que vamos considerar são:

- reflexão segundo um eixo – **simetria de reflexão**
- rotação com centro em um ponto da figura e com uma determinada amplitude – **simetria de rotação**

Anexo 08- Palavras Cruzadas “Isometrias”

Palavras Cruzadas “Isometrias”



Vertical

1- O que mesmo que simetria de rotação
3- Isometria que todos os pontos do transformado são obtidos rodando a figura inicial em torno de um ponto fixo, o centro de rotação, segundo um ângulo orientado no sentido positivo ou no sentido negativo (plural)
5- entidade matemática que se carateriza por uma direção, sentido e comprimento
12- Linha de reflexão

Horizontal

1- transformação geométrica que preserva o tamanho e a amplitude dos ângulos (plural)
3- Isometria em que todos os pontos da figura original se deslocam segundo a mesma direção, o mesmo sentido e percorrendo a mesma distância
5- Isometria em que cada ponto da figura original e o correspondente da figura estão sobre uma reta perpendicular ao eixo de reflexão e igual distância desse eixo
11- o mesmo que simetria por reflexão

Anexo 09- Para saberes um pouco mais sobre a geometria *Sona*

Ficha de tabalho se queres saber um pouco mais sobre

Geometria *Sona*

Se queres saber um pouco mais sobre a Geometria sona, as isometrias e simetrias e a sua presença no nosso dia-a-dia, aconselho-te:

Podes investigares (facultativo):

1. Procura produtos ou marcas que usem padrões repetidos nos seus anúncios ou logotipos.

2. Paulus Gerdes é um matemático holandês que se tem dedicado ao estudo dos sona, tradição que infelizmente já não está em uso. Na Internet encontrarás mais informações e imagens destes desenhos. Eis alguns endereços, a partir dos quais poderás encontrar outros:

http://193.75.136.15/~dhuylebrouck/Ishango_web/Geom3.htm
http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.pattern/sona.html
http://www.tucokwe.org/cultura/artigos/sona_os_desenhos_na_areia.html
http://nautilus.fis.uc.pt/bspm/revistas/20/021-027.150.pdf
http://www.exploratorium.edu/store_images/publications/masc_sona.pdf
http://personal.centenary.edu/~mschlat/sonaarticle.pdf
http://www.botschaftangola.de/content.php?nav=ueber_angola/kunst_kultur/sandzeichnungen
http://rpinfo.rpi.edu/~eglash/isgem.dir/texts.dir/sonapoly.doc
http://mwanapwo.blogspot.com/2006/02/sona-os-desenhos-na-areia.html
http://mwanapwo.blogspot.com/2006/04/os-sona-ou-desenhos-na-areia-e.html
http://plus.maths.org/issue19/features/liki/index.html
http://members.tripod.com/vismath/paulus/
http://amateriadotempo.blogspot.com/2011/05/desenhos-na-areia-em-africa.html

3. Procura outras atividades culturais de outros povos espalhados pelo mundo. (por exemplo, os desenhos na areia praticado pelo povo da Ilhas de Vanuatu, os Lambrequins da Holanda, as figuras Kolam de Tamil (Índia), desenhos murais Litema da África do Sul, tecidos Kente do Quénia, ….)

4. Procura atividades culturais no nosso país em que estejam presentes isometrias. (exemplo, no folclore, na cantaria, nos azulejos, nos Tapetes de Arroiolos,…)

Anexo 10 Desafio-“Tenta adivinhar…Quem sou eu?”

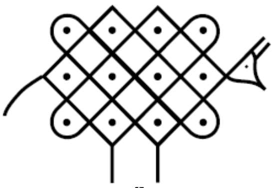
Tenta adivinhar ….. Quem sou eu?

1. Nos desenhos sona reproduzidos abaixo, o desenho A tem um eixo de reflexão vertical e o desenho B não tem eixos de reflexão.

A

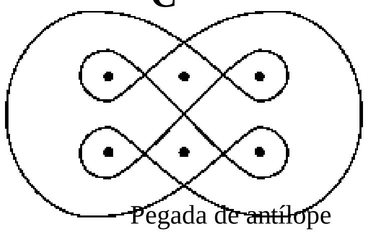
Bailarino

B



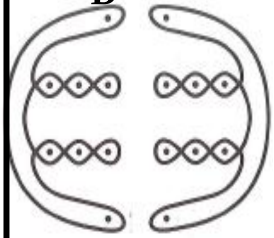
Antílope

C



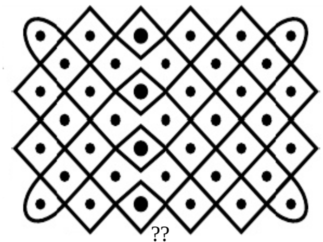
Pegada de antílope

D



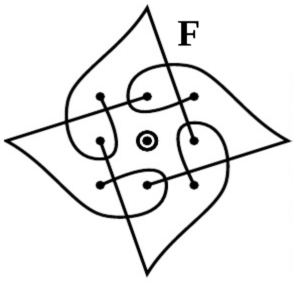
Pessoas a apanhar cogumelos

E



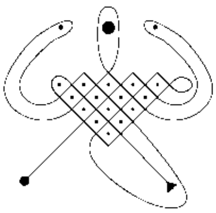
??

F



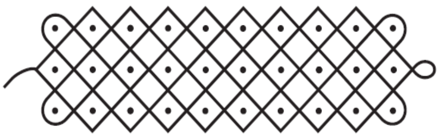
??

G



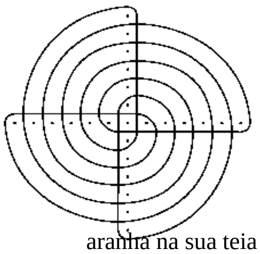
Pássaro a voar

I



Leoa

H



aranha na sua teia

a) Que desenhos, além do A, têm um eixo de reflexão vertical?

b) Que desenhos têm um eixo de reflexão horizontal?

c)Que desenhos têm um eixo de simetria vertical e um eixo de simetria horizontal?

d) Que desenhos, além do B, não têm eixo de reflexão?

2. Observa de novo os desenhos *sona*. Alguns deles podem ser obtidos a partir de um motivo principal e de uma isometria. Por exemplo, o desenho C pode ser obtido a partir de um motivo principal e de uma rotação de amplitude 180º (a chamada meia-volta).
a)Identifica o motivo principal do desenho E e carateriza a isometria e indica o número de vezes que foi aplicada.

b)O que é que podes dizer sobre os desenhos A e E? Justifica.

c)E sobre o desenhos B e H? Justifica.

Anexo 11- Questionário final aos alunos

Questionário

Este questionário faz parte de um trabalho desenvolvido pela docente de Matemática no Mestrado em Didática da Matemática da Universidade de Aveiro.
O questionário foi elaborado com o propósito de recolher a tua opinião sobre as atividades envolvendo os desenhos *sona* que te foram propostas.
O questionário é constituído por 2 partes nas quais se incluem várias questões, para as quais não haverá respostas certas ou erradas, nem uma escolha será preferível a outra. O que é relevante é que dês a tua opinião pessoal sem te deixares influenciar por outro(s) colega(s). Embora o questionário não seja anónimo, as respostas que deres não têm qualquer influência na tua avaliação como aluno.
Após a tua identificação pessoal, todas as questões apresentam opções de resposta. Assinala com uma cruz (X) a opção com que mais te identificas.

Obrigada pela tua colaboração.
A Professora de Matemática: Elisabete Dias

Parte I - Identificação do aluno

Nome:____ Idade:_______
Turma:_______

Naturalidade: Portugal ☐ Cabo Verde ☐ Angola ☐ Moçambique ☐ Roménia ☐

Arménia: ☐ Brasil ☐ África do Sul ☐ Outra:______________

Naturalidade do pai:____________________Naturalidade da mãe:____________________

1. Gostas de Matemática? Sim ☐ Não ☐
2. Achas a Matemática difícil? Sim ☐ Não ☐
3. Vês utilidade na matemática? Sim ☐ Não ☐

Parte II – Apreciação das atividades envolvendo desenhos *sona*

4. Já conhecias os desenhos *sona*? Sim ☐ Não ☐
5. Achas interessante a tradição dos *sona*? Sim ☐ Não ☐
6. Ficaste com curiosidade de conhecer outras manifestações artísticas do povo Cokwe?

   Sim ☐ Não ☐
7. As atividades foram interessantes? Sim ☐ Não ☐
8. Se respondeste sim à pergunta anterior assinala por ordem crescente de importância (1, 2 e 3) os aspetos dos desenhos *sona* que achaste mais interessantes. Se respondeste não, passa à questão 9.

☐ a originalidade dos desenhos;

☐ serem desenhados por um povo com pouca escolaridade mas com tantos conhecimentos matemáticos;

☐ estarem presentes nos *sona* alguns dos conteúdos matemáticos que aprendes na escola;

☐ a maioria dos desenhos serem desenhados sem levantar o dedo (uma só linha contínua);

☐ não se poder passar duas vezes pela mesma linha do desenho, apesar das linhas se poderem cruzar;

☐ existirem histórias associadas aos *sona;*

☐ relacionarem a Matemática com aspetos práticos da vida real;

☐ relacionarem a Matemática com atividades culturais de um povo.

9. As atividades foram difíceis? Sim ☐ Não ☐
10. Se respondeste sim à pergunta anterior assinala por ordem crescente de importância (1, 2 e 3) as principais dificuldades que sentiste ao realizar as tarefas propostas. Se respondeste não, passa à questão 11.

☐ dificuldades na interpretação dos enunciados (não perceber o que era pedido);

☐ não compreender a ligação com as matérias a aprender;

☐ as tarefas eram muito extensas;

☐ as tarefas eram confusas, pouco objetivas;
☐ na realização dos desenhos sona;

11. As atividades com desenhos *sona* tornaram mais fácil aprender a matéria? Sim ☐ Não ☐
12. As atividades com desenhos sona tornaram mais fácil dar atenção à aula? Sim ☐ Não ☐
13. As atividades com desenhos sona tornaram a matéria mais interessante? Sim ☐ Não ☐
14. Os desenhos *sona* motivaram-te para a realização das tarefas propostas pela professora?

    Sim ☐ Não ☐
15. Nas atividades realizadas tornou-se difícil perceber a ligação com a matéria a aprender?

    Sim ☐ Não ☐
16. As atividades realizadas facilitaram a participação dos alunos na aula?

    Sim ☐ Não ☐
17. As atividades realizadas ajudaram-te a perceber que a matemática é praticada por diferentes povos, mesmo os não escolarizados?

    Sim ☐ Não ☐
18. As atividades realizadas ajudaram-te a compreender o tema em estudo (Isometrias: reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante)?

    Sim ☐ Não ☐
19. As atividades realizadas ajudaram-te a dar importância à presença da matemática nas atividades culturais?

    Sim ☐ Não ☐
20. As atividades realizadas motivaram-te para a aprendizagem da matemática?

    Sim ☐ Não ☐

Muito obrigada pela tua colaboração.

Anexo 12- Sopa de letras “Isometrias”

SOPA DE LETRAS “ISOMETRIAS”

Procura, em todas as direções e sentidos, as palavras:

- Simetria
- Translação
- Rotação
- Isometricos
- Vetor
- Eixo de simetria
- Isometria
- Reflexão deslizante
- reflexão

S	I	M	E	T	R	I	A	C	A	P	S	E	P	A	S	N	V	C	V
T	W	P	U	O	P	W	Q	S	E	Q	W	P	Y	P	W	P	E	R	E
P	V	E	R	E	J	K	L	P	H	P	A	T	O	R	O	H	R	I	T
G	K	R	L	P	T	R	A	N	S	L	A	C	A	O	P	E	J	L	O
L	N	E	A	L	S	E	I	E	O	F	P	K	E	T	R	Ç	P	O	R
N	P	K	S	Ç	A	F	P	L	L	I	J	R	P	A	W	S	N	R	E
I	T	V	D	S	O	L	Y	P	P	R	Ç	E	N	C	A	E	F	E	O
L	I	P	Z	C	P	E	J	B	D	E	G	L	M	A	T	B	C	R	P
B	R	S	M	V	R	X	L	D	S	F	N	P	L	O	E	L	A	E	Y
O	K	Z	S	N	T	A	S	O	N	L	M	Ç	A	T	P	F	P	I	R
M	N	L	L	M	I	O	P	L	F	E	F	D	O	D	G	N	T	X	E
D	L	J	E	P	Z	P	C	S	A	X	A	E	F	J	S	M	X	O	H
N	P	T	Q	Q	B	J	B	A	O	A	O	R	S	A	L	S	L	I	S
J	X	E	F	P	K	N	M	E	D	O	X	M	B	T	E	X	O	D	A
O	I	W	S	O	L	F	A	J	L	P	H	E	O	S	A	O	Ç	E	F
M	S	S	L	E	Q	A	T	L	N	D	P	A	S	O	N	Ç	A	W	U
S	O	I	O	G	H	L	E	T	F	E	D	C	S	C	M	D	Y	S	B
H	R	L	S	M	O	E	P	F	C	S	P	M	C	I	D	V	E	I	D
O	J	B	P	A	E	S	Z	C	E	L	X	V	L	R	X	D	X	M	P
Q	S	L	O	S	A	T	E	A	U	I	A	C	A	T	O	A	L	E	C
A	L	A	X	M	X	N	R	O	X	Z	J	K	O	E	S	L	S	T	R
N	D	U	A	F	A	L	P	I	S	A	Ç	O	K	M	P	T	B	R	E
M	L	S	P	K	C	T	J	R	A	N	S	T	D	O	A	R	D	I	T
D	X	L	B	O	S	A	S	P	K	T	B	D	Z	S	C	X	Z	A	Y
I	O	A	E	A	M	I	O	I	V	E	N	S	A	I	S	P	T	P	C

Anexo 13- Ficha de Tarefas “Geometria *Sona*”

Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha
Ano letivo 2011/2012
Disciplina: Matemática- 9ºano   Data: Março de 2012
Docente: Elisabete Dias

Geometria *Sona*

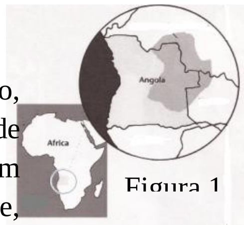


Figura 1

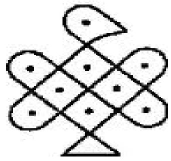
Proponho-te conhecer e explorar uma das muitas manifestações culturais de um povo, os Cokwe, que vive no sudoeste de África, numa região que engloba o Leste de Angola, o Noroeste da Zâmbia e zonas circunvizinhas do Congo (figura 1). Em Angola, este povo conhecido por Quiocos, habita uma região de savana e vive, sobretudo, da caça, da criação de animais, da agricultura e do comércio.

Os Quiocos têm um gosto especial pelas artes (escultura, pintura, desenho, etc.), sendo que em todas as suas manifestações artísticas é possível encontrar também a presença de muitas ideias matemáticas associadas à geometria que hoje estudas na escola. Em particular, destacam-se, pela sua beleza matemática, os desenhos *sona*, executados com os dedos sobre a areia.

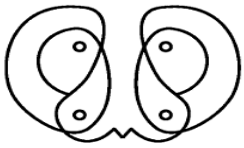
Na tradição dos Quiocos, a arte de desenhar na areia estava a cargo dos homens que a ensinavam aos seus descendentes diretos e aos jovens nos rituais de iniciação da vida adulta. Um *lusona* (singular de *sona*) acompanhava uma história popular, um provérbio, uma fábula e era desenhado à medida que a narração se desenrolava. Por isso, há desenhos a respeito de figuras humanas, objetos, animais, plantas, costumes, contos e fábulas. No passado, tais desenhos e as histórias que eles ilustravam, desempenharam um papel muito importante na transmissão de conhecimentos de geração em geração.

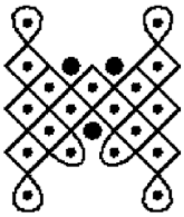
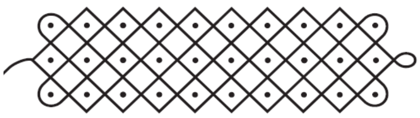
Na figura 2, podes ver exemplos de alguns *sona*.

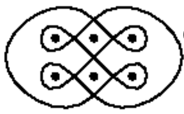
Figura 2


Ave

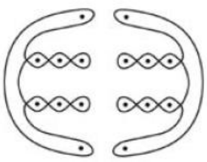

Morcego

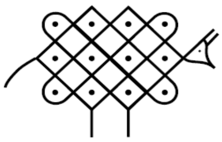

Cabeça de coruja



A leoa


O galo e o chacal (fábula)

Pegada de antílope


Pessoas a colher cogumelos


antílope

A execução de um *lusona*

Para inciar um lusona, o artísta começa, geralmente, por alisar a areia e com a ponta dos dedos, indicador e médio, cria uma rede de pontos equidistantes chamados *tobe* que funcionam como um quadro para o lusona. O número de linhas e colunas depende do motivo a ser realizado (ver figura 3)

Figura 3

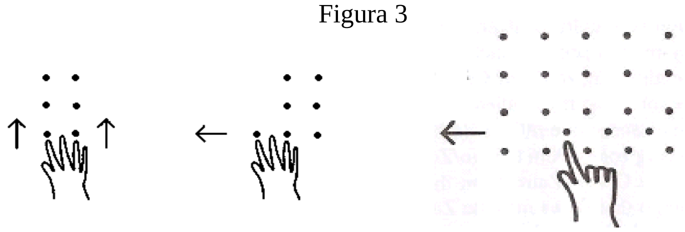
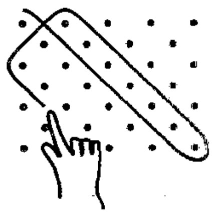


Figura 4

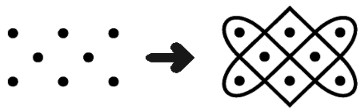


Marcados os pontos, inicia-se a execução propriamente dita do desenho através do traçado de linhas que circundam os pontos, nunca os tocando. As linhas podem cruzar-se mas apenas podem ser percorridas uma vez (Figura 4).

Uma das caraterísticas de alguns *sona* é que as suas linhas se podem desenhar sem levantar o dedo, pelo que, um *lusona* pode ser traçado com uma só linha contínua, enquanto que outros necessitam de duas ou mais linhas.

Na figura 5 apresenta-se a rede de pontos e o desenho final de um l*usona* que representa a amizade e que pode ser inteiramente traçado sem levantar o dedo da areia.

Figura 5



Propostas de trabalho:

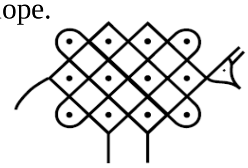
Tarefa 1:

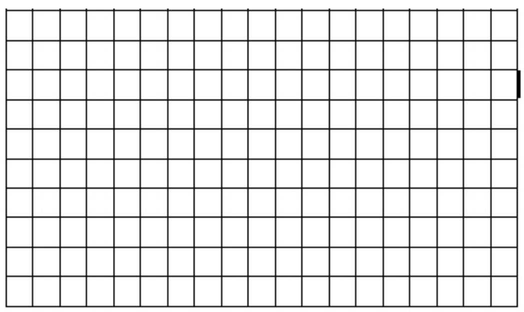
Percorre a linha do *lusona* da amizade com o lápis, mas nota que:

- ✓ não podes levantar o lápis do papel;
- ✓ podes cruzar uma linha já feita anteriormente, mas não podes passar duas vezes sobre a mesma linha.

Tarefa 2:

Para te ajudar a compreender como é que os desenhos sona são executados, proponho-te que desenhes um antílope.

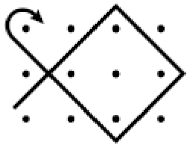




Marca sobre o quadriculado ao lado uma rede retangular de 3 por 4 pontos. Não te esqueças que os pontos devem ser marcados à mesma distância uns dos outros.

Ajuda: Para **traçar o *lusona*** segue as seguintes regras e toma a figura 6 como ajuda:

Figura 6



- ✓ As linhas circundam os pontos, nunca os tocando;
- ✓ O ponto de início do lusona é um ponto a meia distância de dois pontos consecutivos da rede retangular;

lusona são traçadas formando um ângulo de 45º com a horizontal, isto é, diagonalmente aos pontos da grelha;

- ✓ Ao sair da rede, a linha roda 90º ou, se estiver junto a um dos quatro cantos da rede, faz uma meia volta (um giro de 180º) e continua paralelamente à linha traçada anteriormente.
- ✓ Podes cruzar uma linha mas não podes passar duas vezes sobre a mesma linha.

No final, decora o teu antílope fazendo-lhe a cabeça, as pernas e a cauda.

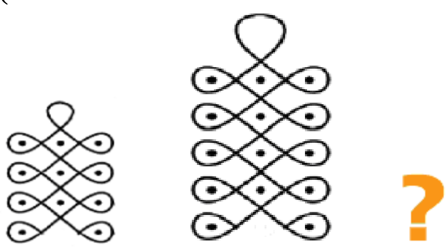
Tarefa 3 (facultativo- para casa**)**

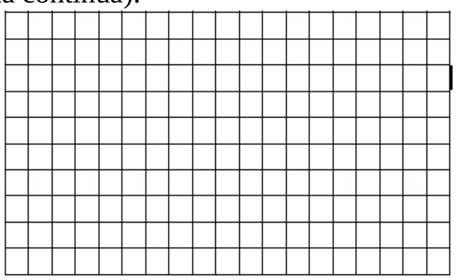
Desenha uma malha retangular de 4 por 6 pontos e traça um *lusona* seguindo as regras anteriores. O que observas? Quantas linhas diferentes tens de desenhar para completar o *lusona*?

Sugestão: Decora o *lusona* a teu gosto e dá-lhe um título.

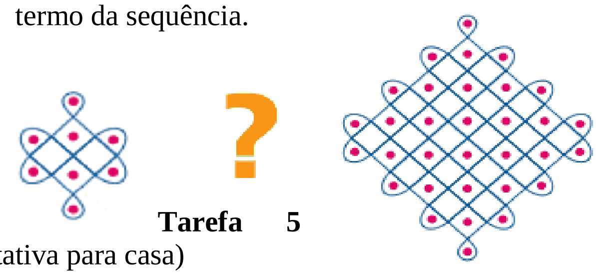
Tarefa 4:

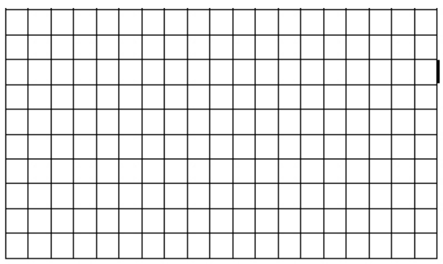
1. Os dois *sona* a seguir reproduzidos representam os dois primeiros termos de uma sequência de figuras. Observa-os com atenção e identifica a regra que permite passar de um desenho para imediatamente a seguir. Continuando o padrão, desenha no quadriculado o próximo termo da sequência.
   (tenha desenhar o lusona através de uma linha contínua).





2. Os dois *sona* a seguir reproduzidos representam os 1.º e o 3.º termos de uma sequência de desenhos. Observa-os com atenção e identifica a regra que permite passar de um desenho para imediatamente a seguir. Continuando o padrão, desenha no quadriculado o segundo termo da sequência.





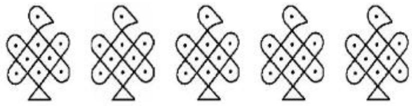
Tarefa 5 (Facultativa para casa)

Inventa o teu *lusona* (um padrão de pontos e linhas). Faz uma sequência de desenhos que vão aumentando de acordo com o teu padrão. Retira um deles. Desafia um colega a descobrir o desenho que retiraste.

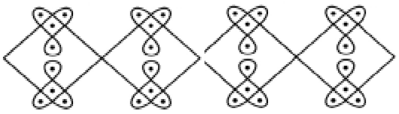
Tarefa 6

Observa os seguintes frisos:

A



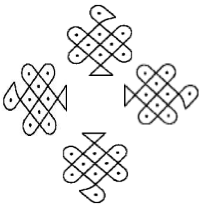
B



3. Identifica o motivo principal de cada um dos frisos.
4. Qual a transformação que permitiram construir os frisos A e B a partir do motivo principal? Carateriza-a.

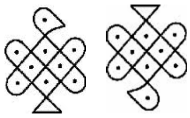
Tarefa 7

Identifica a transformação associada aos desenhos, caso exista:

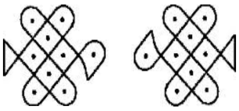


7.1

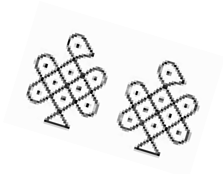
7.2



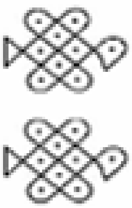
7.3



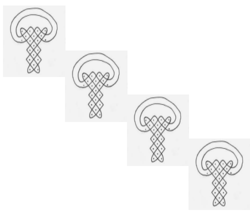
7.4



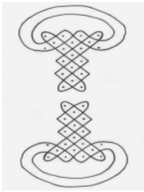
7.5

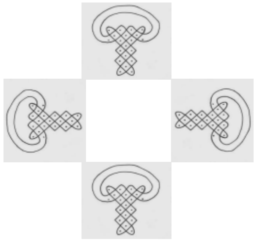


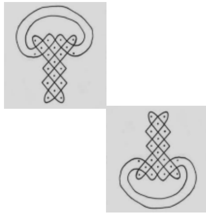
7.6



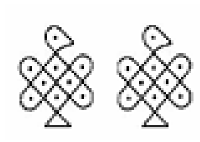
7.7 **7.8** **7.9**



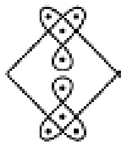




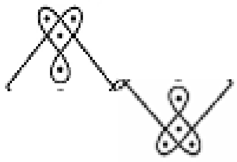
7.10



7.11

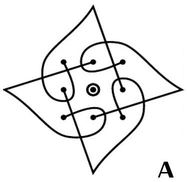


7.12

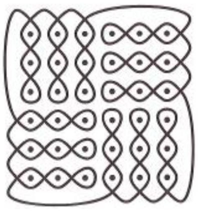


Tarefa 8

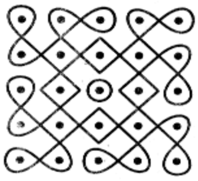
Observa os desenhos sona:



A



B



C

Cada um deles pode ser obtido partindo de um motivo principal e de uma isometria. Em cada caso, identifica o motivo principal, colorindo-o com uma caneta de cor, carateriza a isometria e indica o número de vezes que foi aplicada.

Tarefa 9

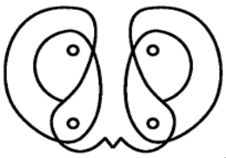
1. Outro dos aspetos matemáticos dos *sona* tem a ver com a presença ou não de **simetria** nos desenhos. Existem vários tipos de simetria, nomeadamente a **simetria axial e a simetria rotacional**.

Observa com atenção os seguintes *sona:*

A

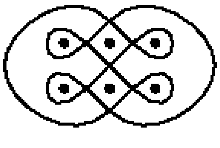
Morcego

B



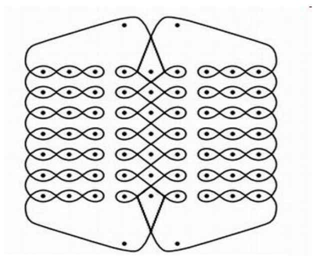
Cabeça de coruja

C



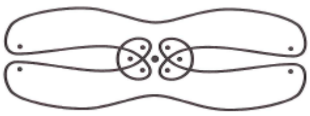
Pegada de antílope

D



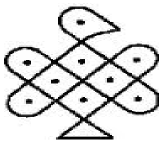
A cegonha e o leopardo (fábula)

E



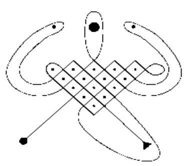
Aranha no centro da teia

F



Ave

G



Pássaro a voar

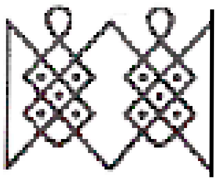
Diz-se que uma figura plana tem **simetria de reflexão ou simetria axial** se existir uma reta que passa pela figura e que é um **eixo de reflexão** da figura.

a) Quais têm eixos de simetria de reflexão?

b) Quantos eixos de simetria de reflexão tem cada um? Traça-os.

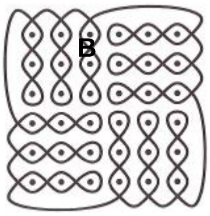
2. Diz-se que uma figura plana tem **simetria rotacional** se a figura coincide consigo mesma quando se roda um certo ângulo entre 0º e 360º em torno de um certo ponto. O **centro da rotação** é o ponto sobre o qual a figura roda.

A



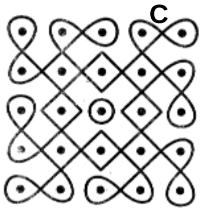
2 patos a voar

B

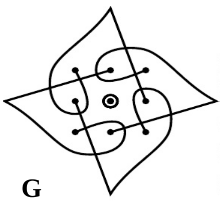


Leões machos que furtivamente planeiam as suas intrigas

C



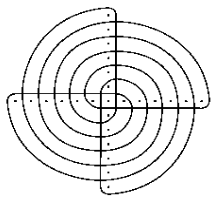
D



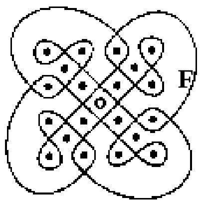
G

Teia de aranha

E



F

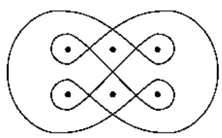


Aranha na sua teia

G

ratoeira

H



Pegada de antílope

a) Diz quais das seguintes figuras têm simetria rotacional.

b) Desenha o centro de rotação de cada figura e indica a amplitude do ângulo de rotação.

Anexo 14- Teste diagnostico sobre rotação, translação, reflexão e simetria de reflexão

Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha

Teste diagnóstico sobre rotação, translação, reflexão e simetria de reflexão

Ano letivo: 2011/12 Disciplina: Matemática

Nome: ____ Nº: _____

Ano: 9º Turma: _____ Data: ___ – 02 – 12

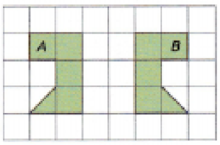
A prof: __________________________ O Enc. Educação:_______________

"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências." - Jacques Hadarmard

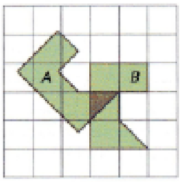
Lê o teste com muita atenção. BOM TRABALHO!

1. Observa os pares de figuras A e B. Em cada situação, a figura B foi obtida da figura A por uma transformação geométrica. Identifica, para cada caso, a rotação, translação e reflexão utilizada.

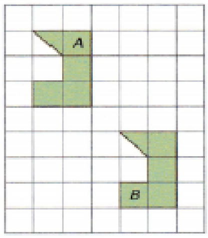
1.1



1. 2



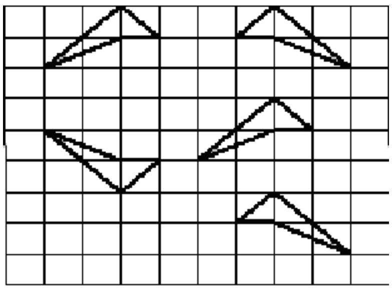
1.3



_______________________ _____________________ ______________________

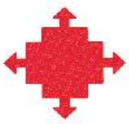
2. Identifica pelas respetivas letras que representam transformados da figura A por:

A B



a) Translação
   b) Reflexão
   c) Desenha os eixos de simetria e o vetor associado à translação identificada.

3. Considera as seguintes figuras.



A

B

C

D

Indica quantas simetrias de reflexão tem cada figura.

A: _______ **B:** _______ **C:** _______ **D:** _______

Anexo 15- Teste de avaliação formativo sobre isometrias

Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha

Ano letivo 2011/2012

Disciplina: Matemática- 9ºano **Tema: Isometrias**

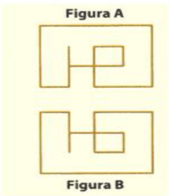
Data: Março de 2012 Docente: Elisabete Dias

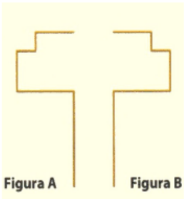
Teste de avaliação formativo sobre **Isometrias**

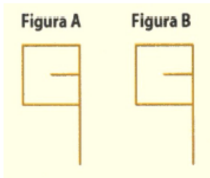
Nome:____Turma:_____ Número:________

"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências." - Jacques Hadarmard

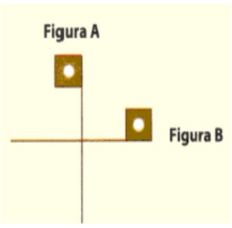
1. Observa as seguintes figuras e indica, se existir, qual a isometria (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante) que transforma a figura A na figura B, respetivamente.

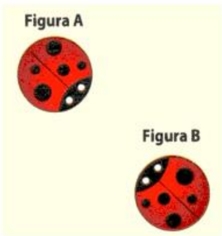


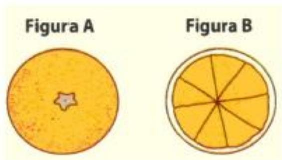




____________________ ______________________ ________________________

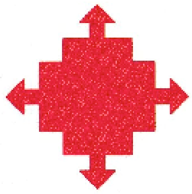


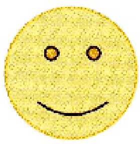


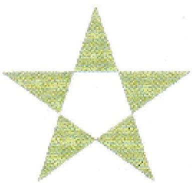


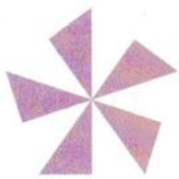
__________________ _____________________ _______________________

2. Considera as seguintes figuras:









A B C D

2.1 Indica quantas simetrias de reflexão tem cada figura:

A:_________ B:__________ C:__________ D:____________

2.2 Indica quantas simetrias de rotação tem cada figura:

A:_________ B:__________ C:__________ D:____________

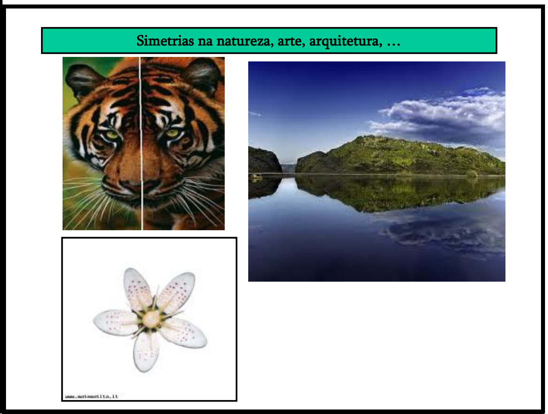
3. Com o que foste aprendendo sobre isometrias, analisa cuidadosamente cada uma das transformações anteriores e preenche o quadro que se segue, indicando as afirmações verdadeiras e as falsas com um X.

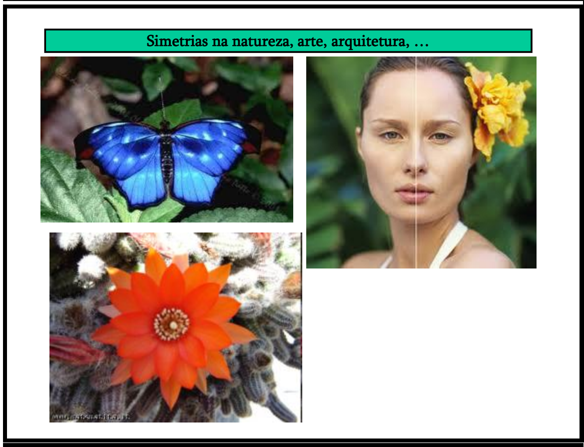
	Afirmações	Verdadeiro	Falso
	a) Numa reflexão, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta paralelo ao primeiro.		
	b) Numa reflexão, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta de igual comprimento (congruente)		
	c) Numa reflexão, a distância de um ponto ao eixo de reflexão é igual à distância da sua imagem ao mesmo eixo.		
	d) Numa reflexão, a imagem de um ângulo é sempre um ângulo de igual amplitude.		
	e) Numa reflexão, o sentido dos ângulos é preservado.		
	f) Numa reflexão, a amplitude de um ângulo é sempre preservada.		
	g) Numa rotação, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta paralelo ao primeiro.		
	h) Numa rotação, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta de igual comprimento (congruente).		
	i) Numa rotação, a distância de um ponto ao centro da rotação é igual à distância da sua imagem ao mesmo centro.		
	j) Numa rotação, a imagem de um ângulo é sempre um ângulo de igual amplitude.		
	k) Numa rotação, o sentido dos ângulos é preservado.		
	m) Numa translação, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta paralelo ao primeiro.		
	n) Numa translação, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta de igual comprimento (congruente).		
	o) Numa translação, a distância de qualquer ponto à sua imagem é sempre igual ao comprimento do vetor associado à translação.		
	p) Numa translação, o sentido dos ângulos é preservado.		
	q) Numa reflexão deslizante, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta paralelo ao primeiro.		
	r) Numa reflexão deslizante, a imagem de um segmento de reta é sempre um segmento de reta de igual comprimento (congruente)		
	s) Numa reflexão deslizante, a distância de qualquer ponto à sua imagem é sempre igual ao comprimento do vetor associado à translação.		
	t) Numa reflexão deslizante, o sentido dos ângulos é preservado.		

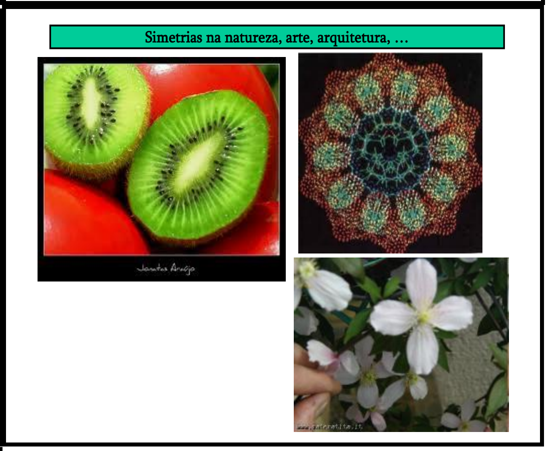
Anexos 16- Powerpoint "Simetrias na natureza, arte, arquitetura,.."

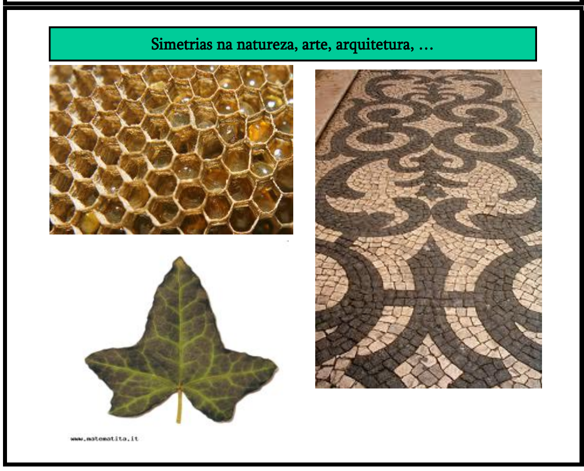
Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Autora: Elisabete Dias
Docente de Matemática
Ano letivo: 2011-12
9ºano





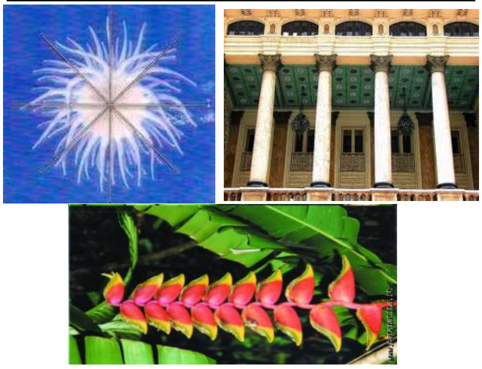




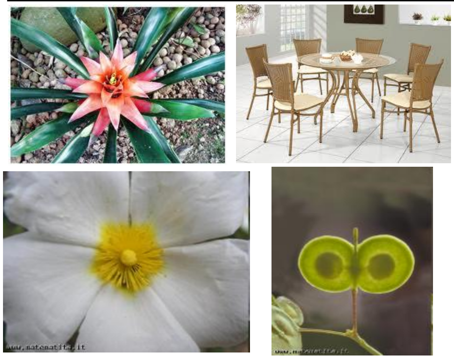
Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

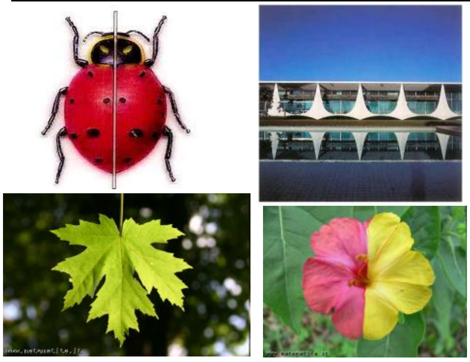
Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …



Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

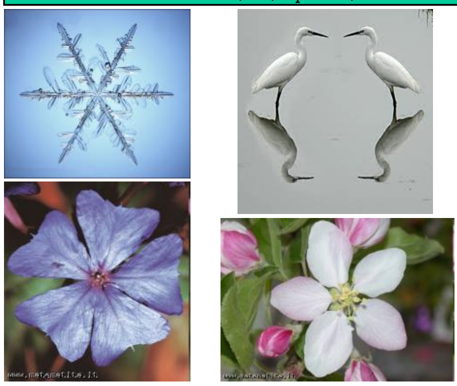


Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

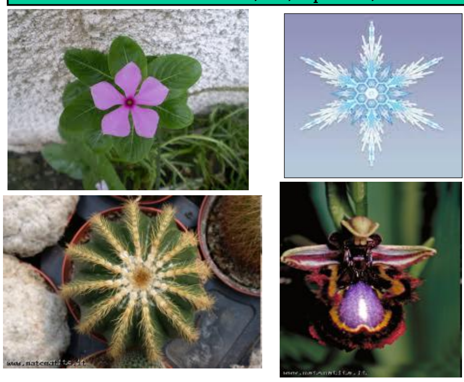


Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …



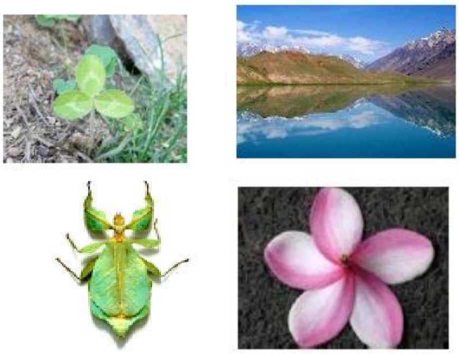
Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …



Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

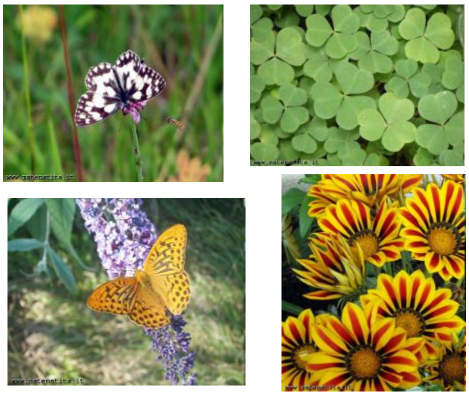


Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …



Simetrias na natureza, arte, arquitetura, …

FIM

Anexo 17—Powerpoint "Isometrias e simetrias"

Isometrias e simetrias

Autora: Elisabete Dias
Disciplina: Matemática
9ºano
Fevereiro/ Março de 2012

1

1º parte

Objetivos:
- Relembrar translação e vetor;
- Relembrar rotação, centro de rotação e amplitude;
- Relembrar reflexão, eixo de reflexão, figuras simétricas;
- Aprender o que é a reflexão deslizante.

2

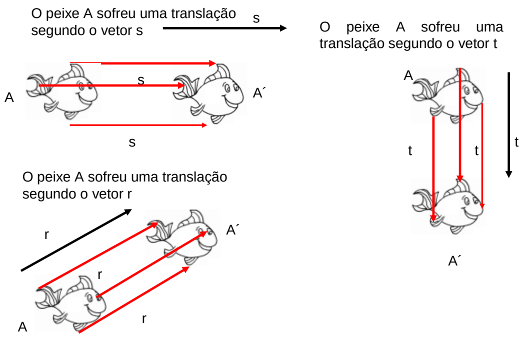
Translação

Translação: Deslocamento de uma figura segundo uma direção, um sentido e um comprimento.

- Dadas duas figuras, uma é translação da outra se puder ser obtida a partir dela por deslocação ao **longo de uma reta, paralelamente à posição inicial.**
- Numa **translação** todos os pontos de uma figura se "deslocam" na mesma direção, no mesmo sentido e a mesma distância.

3

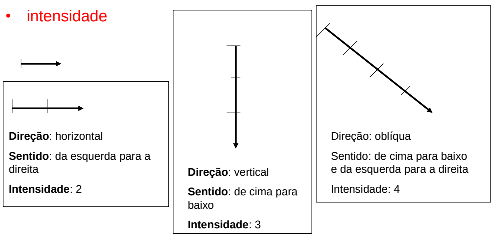
Translação



4

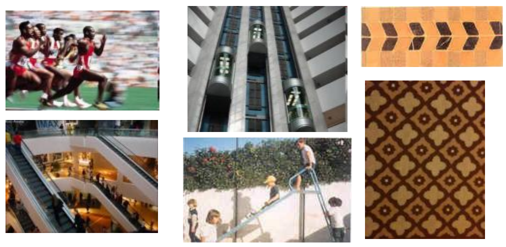
Vetor

Um vetor é uma entidade matemática que fica caraterizado por:
- Uma direção
- Um sentido
- intensidade



5

Exemplos de translações



Propriedades das translações:
1. Qualquer segmento de reta é transformado num segmento de reta, paralelo ao primeiro e com o mesmo comprimento;
2. Qualquer ângulo é transformado num ângulo geometricamente igual.

6

Rotação

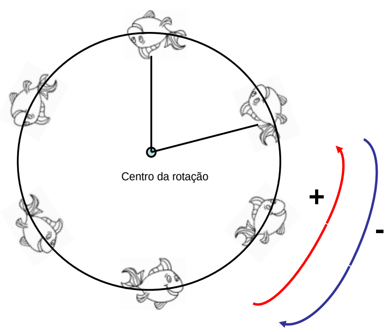
ROTAÇÕES

Rotação é uma isometria caraterizada por: Um ponto fixo chamado centro de rotação (O) e pela amplitude do ângulo da rotação (α).

Convenciona-se:
- **Sentido positivo:** o movimento contrário ao dos ponteiros do relógio.
- **Sentido negativo:** o movimento dos ponteiros do relógio.

7

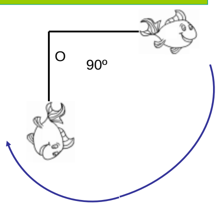
Rotação



8

Rotação

O peixe da esquerda "rodou" no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo), descrevendo um ângulo de vértice O e amplitude 90º.



Numa rotação (propriedades):

1. Um segmento de reta é transformado num segmento de reta geometricamente igual.
2. Um ângulo é transformado noutro ângulo geometricamente igual e com o mesmo sentido.

9

Exemplos de rotações

1. O movimento das **pás de um moinho**.
2. O movimento realizado pelos **ponteiros do relógio**.
3. Numa **roda gigante** de um parque de diversões existem cadeiras fixas numa estrutura circular, igualmente espaçadas. Quando a roda entra em funcionamento, as cadeiras efetuam um movimento de rotação.

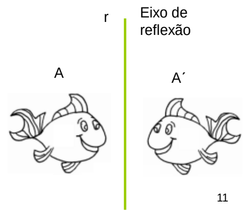
…

10

Reflexão

A reflexão de eixo r é uma transformação tal que, dado um ponto A, a imagem de A por essa reflexão, A´, é um ponto cuja distância à reta r é igual à distância de A a r, e se tem AA´ é perpendicular a r .

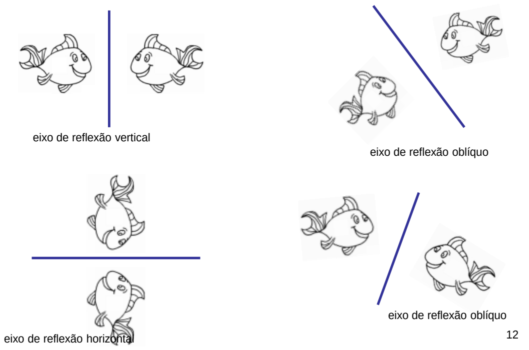
O peixe A sofreu uma reflexão através da reta r e a sua imagem refletida (peixe A´) encontra-se à mesma distância do eixo de reflexão que o peixe A se encontra do eixo.



11

Reflexão

Exemplos de reflexões:



12

Propriedades da reflexão

Na reflexão:

1. As distâncias entre a figura original e o eixo de reflexão é a mesma que a sua transformada e o mesmo eixo de reflexão.
2. As amplitudes dos ângulos entre a figura original e a sua transformada são conservadas.

13

Onde encontramos as reflexões?

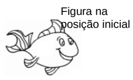
1. Na natureza- uma imagem refletida na água é aproximadamente igual à imagem real.
2. Num espelho- a imagem que vemos num espelho é uma reflexão do nosso corpo. Por isso se diz "imagem refletida no espelho".

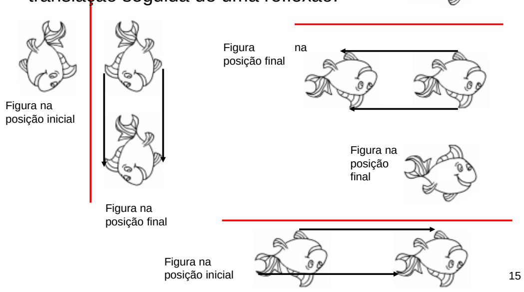
…

14

Reflexão deslizante

•É uma transformação constituída por uma reflexão seguida de translação ou de uma translação seguida de uma reflexão.

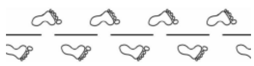




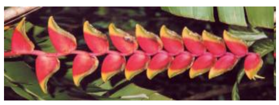
15

Exemplos de reflexões deslizantes

1. Quando nos deslocamos descalços em linha reta.



2.



Heliconia rostrata

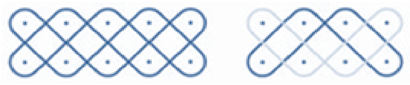
Numa reflexão deslizante (propriedades):

1. Um segmento de reta é transformado num segmento de reta geometricamente igual.
2. Um ângulo é transformado noutro ângulo geometricamente igual.

16

Anexo 18- Powerpoint “Geometria *Sona*”

GEOMETRIA SONA



Autora: Elisabete Dias
Disciplina: Matemática
9º ano

1

2

Tradição Sona

Os desenhos sona

A tradição sona pertence à herança **Tchokwe** e povos vizinhos no **leste de Angola, noroeste de Zâmbia**. Estes desenhos são chamados **lusona** (singular) ou **sona** (plural).

São os meninos que aprendem o significado e execução dos desenhos mais fáceis durante o ritual de iniciação e os sona mais complicados são transmitidos por “especialistas” para os seus descendentes machos. Estes especialistas são “contadores de histórias” que fazem **desenhos na areia para ilustrar provérbios, jogos, adivinhas e animais**.

3

Tradição sona

Para facilitar a memorização dos desenhos padronizados, os especialistas utilizam a seguinte mnemónica (regra):

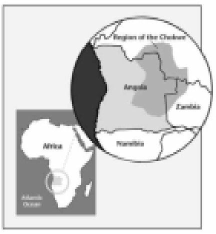
Limpam e alisam o chão; Marcam com as pontas dos dedos uma grade ortogonal de pontos equidistantes; Traçam uma ou mais linhas que envolvem os pontos da grade de referência.

Muitos destes desenhos pertencem a uma velha tradição e desempenham um papel importante na transmissão do conhecimento e da sabedoria de uma geração para a seguinte.

A maioria dos desenhos sona obedece ás seguintes regras:
- não se pode levantar o lápis do papel;
- pode-se cruzar uma linha já feita anteriormente, mas não se pode passar duas vezes sobre a mesma linha.

4

Localização do povo Cokwe



Tradição sona

Até ao final dos anos 50, os nativos africanos do povo Tshokwe, ainda hoje com aproximadamente um milhão de pessoas que vivem no nordeste da Angola, reuniam-se á volta da fogueira e, após realizarem a sua caça, escutavam um deles a contar histórias segundo um ritual preciso.

Marcavam no solo arenoso com os dedos, formando uma malha com formato pontilhado, podendo ser quadrada ou triangular, dependendo do desenho a ser executado, e executavam os seus desenhos.

Na sua maioria, os desenhados só têm uma linha, e realizavam os desenhos sem retirar o dedo da areia até terminar toda a figura. Vários Sona eram designados como ritual de passagem dos jovens para a idade adulta.

6

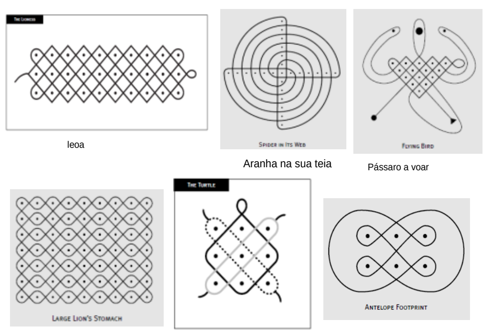
Tradição sona

Na sua tradição, a arte de desenhar na areia era ensinada pelos mais velhos aos jovens e o desenho era feito à medida que contavam lendas, recordavam tempos passados, etc.

O desenho final é a imagem da história que vai sendo contada, o nome do desenho e título da história só é contado no final. A mesma história pode ter desenhos diferentes.

7

Mais desenhos sona

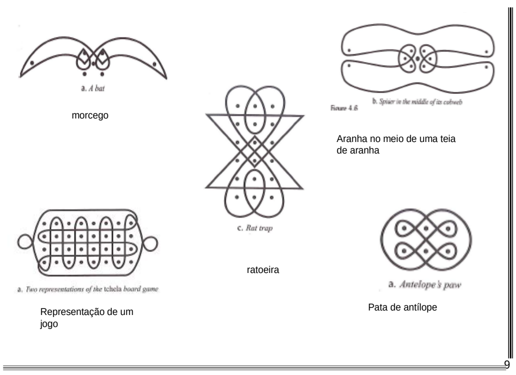


leoa — Aranha na sua teia — Pássaro a voar

Estomago de leão largo — tartaruga — Pegada de antílope

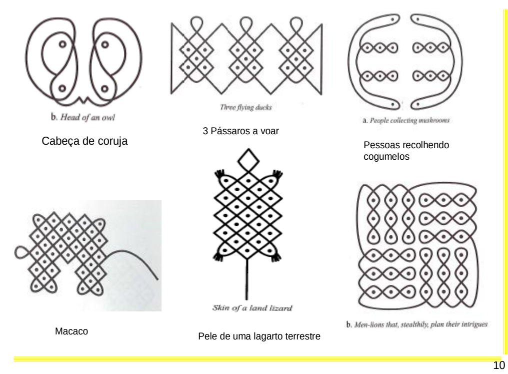
8

Desenhos sona



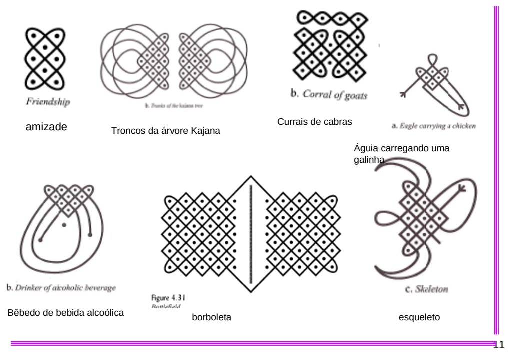
9

Desenhos sona



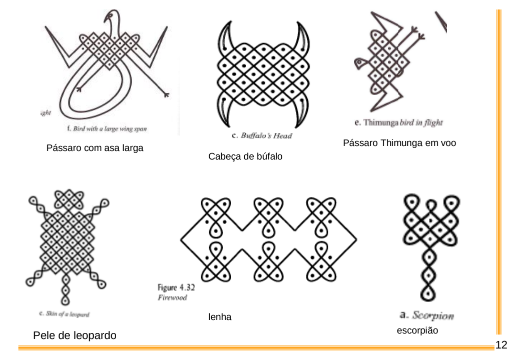
10

Desenhos sona



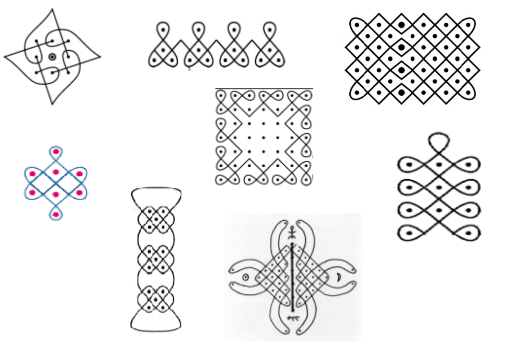
11

Desenhos sona



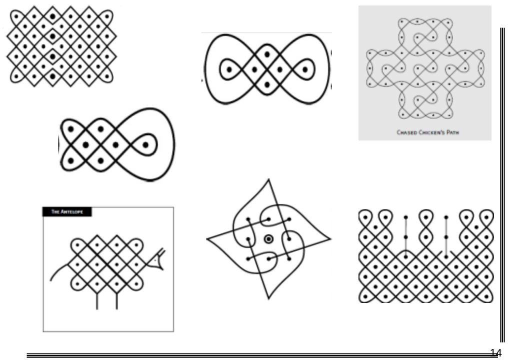
12

Desenhos sona



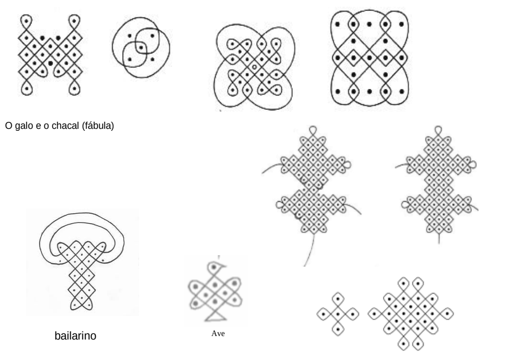
13

Desenhos sona



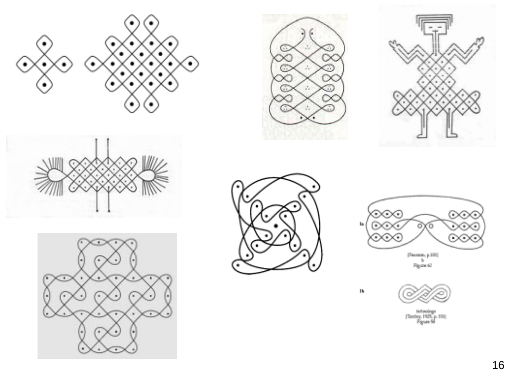
14

Desenhos sona



15

Desenhos sona



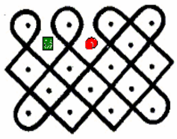
16

ALGUMAS HISTÓRIAS

O caçador e o cão:

Conta um velho narrador que certo caçador chamado Tshipinda foi à caça levando o cão Kawa e apanhou uma cabra-do-mato. De volta à aldeia, o caçador dividiu a carne com Calala, o dono do cão, sendo que, Kawa ficou apenas com os ossos. Depois de algum tempo, voltou Tshipinda a pedir os serviços do cão, mas ele recusou-se a ajudá-lo. Disse ao caçador que levasse Calala, pois era com ele que costumava dividir a carne.

Figura 6. Neste desenho, o quadrado verde representa o caçador e o círculo vermelho o cão (Gerdes, P. 1994)



17

Algumas histórias sona

O galo e a raposa

O galo Kanga e a raposa Mukuza pretendiam a mesma mulher. Pediram-na em casamento ao seu pai, que exigiu de ambos pagamento adiantado. Eles concordaram prontamente. De repente, correu o boato de que a prometida havia falecido. Kanga irrompeu num choro inconsolável, enquanto Mukuza apenas lamentava ter perdido o pagamento adiantado. Então o pai, que a propósito tinha espalhado o boato para ver quem merecia a sua filha, entregou-a ao galo, que revelou ter bom coração.

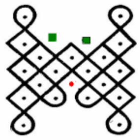


Figura 7. Neste desenho, o ponto vermelho representa a filha e os quadrados verdes os pretendentes (Gerdes, P. 1994)

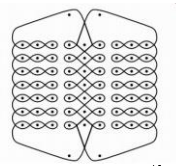
18

Histórias

A cegonha e o leopardo

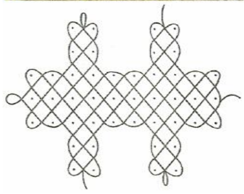
Certo dia, o leopardo Kajama pediu à cegonha Kumbi algumas penas para forrar a sua toca. Passado um tempo, foi a ave que pediu a Kajama da sua pele. Ao atender ao pedido, o leopardo veio a morrer. Os seus filhos procuraram vingar-se, mas Kumbi, que dominava bem o pântano, conseguiu escapar. No desenho, os pontinhos representam o pântano pelo qual a cegonha corria.

Fonte: Gerdes, Paulus. Vivendo a matemática: desenhos da África. 3ª ed.,São Paulo: Scipione, 1997. 64 p.



19

FIM



Obrigada

20

Anexo 19- Algumas histórias *Sona*

ALGUMAS HISTÓRIAS SONA

O caçador e o cão

Conta um velho narrador que certo caçador chamado Tshipinda foi à caça levando o cão Kawa e apanhou uma cabra-do-mato. De volta à aldeia, o caçador dividiu a carne com Calala, o dono do cão, sendo que, Kawa ficou apenas com os ossos. Depois de algum tempo, voltou Tshipinda a pedir os serviços do cão, mas ele recusou-se a ajudá-lo. Disse ao caçador que levasse Calala, pois era com ele que costumava dividir a carne.

Figura 6. Neste desenho, o quadrado verde representa o caçador e o círculo vermelho o cão (Gerdes, P. 1994)

O galo e a raposa

O galo Kanga e a raposa Mukuza pretendiam a mesma mulher. Pediram-na em casamento ao seu pai, que exigiu de ambos pagamento adiantado. Eles concordaram prontamente. De repente, correu o boato de que a prometida havia falecido. Kanga irrompeu num choro inconsolável, enquanto Mukuza apenas lamentava ter perdido o pagamento adiantado. Então o pai, que a propósito tinha espalhado o boato para ver quem merecia a sua filha, entregou-a ao galo, que revelou ter bom coração.

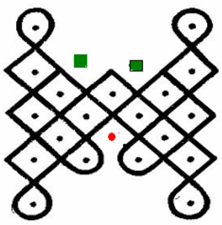
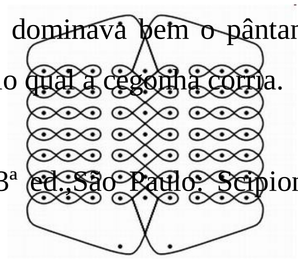


Figura 7. Neste desenho, o ponto vermelho representa a filha e os quadrados verdes os pretendentes (Gerdes, P. 1994)

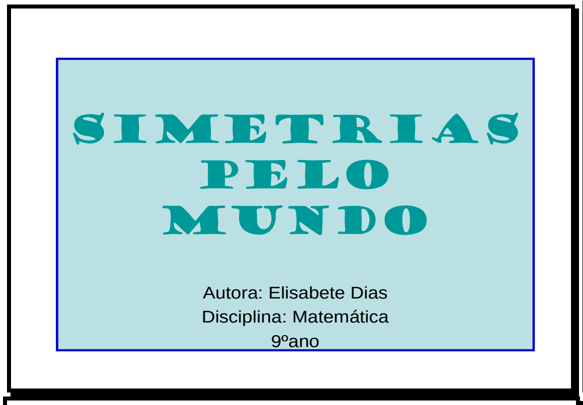
A cegonha e o leopardo

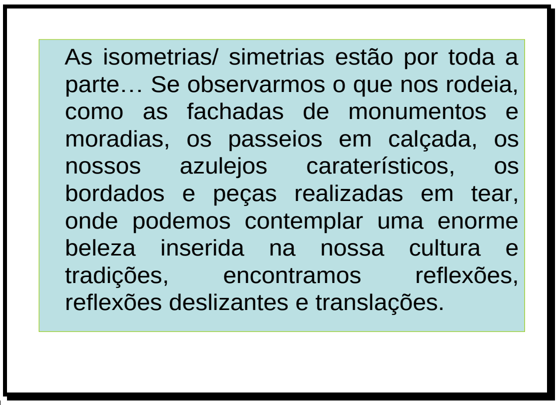
Certo dia, o leopardo Kajama pediu à cegonha Kumbi algumas penas para forrar a sua toca. Passado um tempo, foi a ave que pediu a Kajama da sua pele. Ao atender ao pedido, o leopardo veio a morrer. Os seus filhos procuraram vingar-se, mas Kumbi, que dominava bem o pântano, conseguiu escapar. No desenho, os pontinhos representam o pântano pelo qual a cegonha corria.



Fonte: Gerdes, Paulus. Vivendo a matemática: desenhos da África. 3ª ed. São Paulo: Scipione, 1997. 64 p.

Anexo 20 Powerpoint “Simetrias pelo mundo”





Olaria e cerâmica



Edifícios


Monumentos

Mosteiro dos Jerónimos

Mosteiro de Mafra


Estação do Rossio, Lisboa

Monumentos

Mosteiro de Alcobaça

Palácio do Buçaco


Torre de Belém

Cantaria

A Igreja da **Nª Sra. da Assunção** faz corpo com o último Convento Cisterciense feminino de Portugal, na **Tabosa** (Carregal)

Viana do Castelo

Cruzeiro de Alqueidão (Figueira da Foz)

Tapetes de flores para a procisão do Senhor Santo Cristo dos Milagres


Varandas


Mozambique



Moçambique

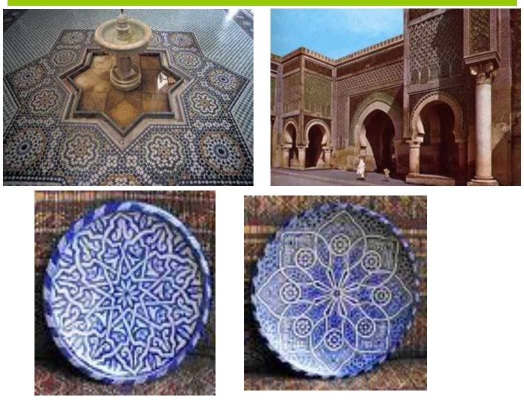
Moçambique

Gana (país da África ocidental)

Índia (país da Àsia Meridional)

Indonésia

Marrocos



Bora (Amazónia Peruana)

Desenhos na areia nas Ilhas Vanuatu (Oceania)

Cestos tijelaformes entrançados em espiral- Suazilândia

Litema- África do Sul

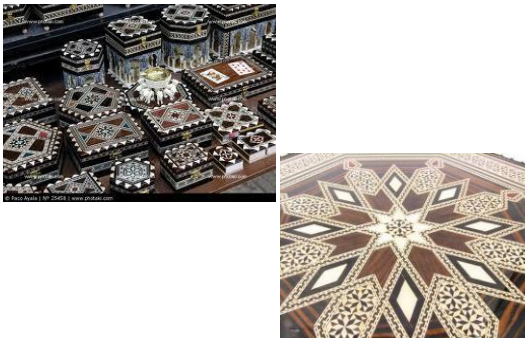
Mochilas arhuacas (povos indígenas da Sierra Nevada de Santa Marta, Norte da Colômbia)

Cestaria Zulu (África do Sul)

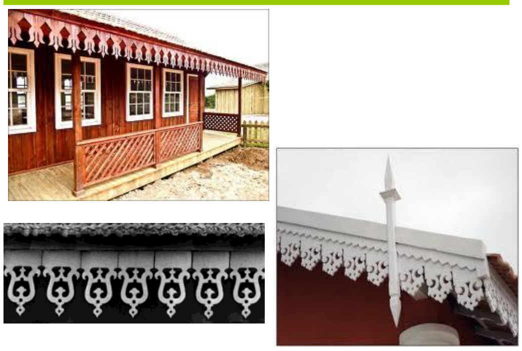
Ìndios –Amazónia (Brasil)

PÊSSANKAS- Ucrânia

La taracea- Granada- Espanha

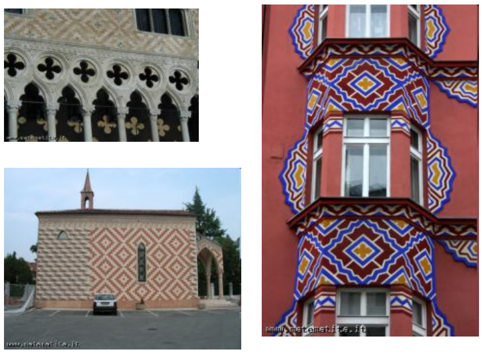


Lambrequim -Holanda



Rendas pelo mundo

Monumentos pelo mundo



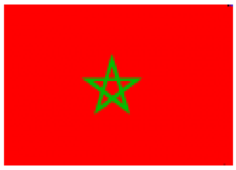
Monumentos pelo mundo

Monumentos pelo mundo

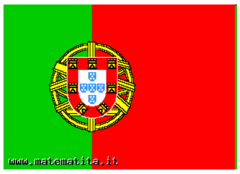
Artesanato africano

Bandeiras

Bandeira do Canadá



Bandeira de Marrocos



Frisos decorativos

Anexo 21- Produções escritas dos seis alunos

Nome:____ nº:_________9º1

As atividades envolvendo desenhos sona **incentivou-te a efetuar as tarefas propostas** pela docente? Porquê?____

____
____
____
____

Este tipo de atividades melhorou a tua opinião sobre a **matemática**? Porquê?____

____
____
____
____

Este tipo de atividades contribui para veres o **lado humano da matemática**? Porquê?____

____
____
____
____

Este tipo de atividade ajudou-te a ver que a **Matemática está presente na arte e na cultura dos povos? Porquê?**____

____
____
____
____

Estas atividades ajudaram-te a **identificar isometrias e simetrias no teu dia-a-dia** (na arte, na natureza, na arquitetura,....) ? Dá exemplos em que isso tenha sucedido (se a resposta for afirmativa).____

____
____
____

Sugestões:____
____
____
____

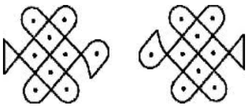
Anexo 22: Ficha de avaliação sumativo sobre isometrias e simetrias

Escola Básica 2, 3 Visconde de Juromenha
Ano letivo 2011/2012
Disciplina: Matemática- 9ºano
Data: Março de 2012 Docente: Elisabete Dias
Ficha de avaliação sumativo sobre **Isometrias e simetrias**
Nome:____Turma:________Número:______
Classificação:___________________ Docente:_________ Enc. Educ:___________________

1. Observa cada uma das figuras.

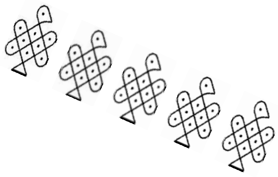
Em cada uma das alíneas, descreve a transformação, caso exista, que transformam a figura A na figura B

1.1

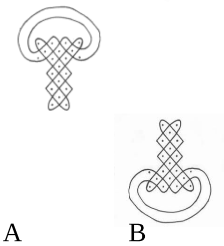


A B

1.2

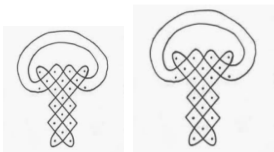


1.3



A B

1.4

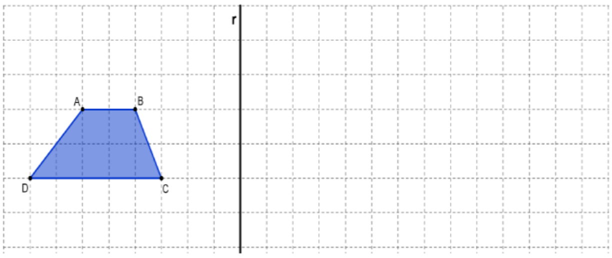


A B

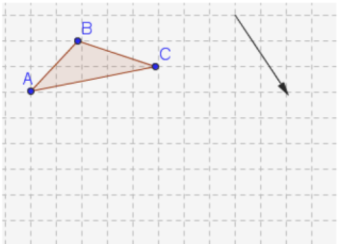
Das isometrias anteriores, identifica as que:

a) preservam a amplitude dos ângulos
b) preservam o comprimento dos segmentos de reta
c) preservam a orientação dos ângulos
d) invertem a orientação dos ângulos
e) preservam a direção da figura.

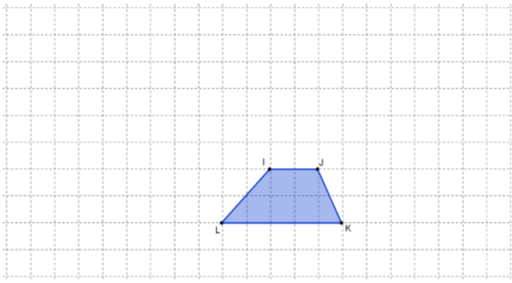
2. a) Constrói a imagem do trapézio [ABCD] usando uma reflexão de eixo r:



b) Constrói a imagem do triângulo [ABC] na translação associada ao vetor u:

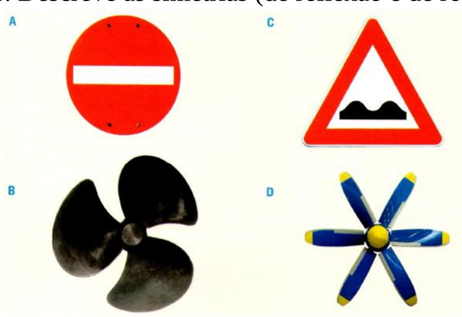


c) Constrói a imagem do trapézio [IJKL] na rotação de centro L e amplitude +90º:



3. O símbolo seguinte encontra-se nas placas que assinalam a localização dos lavabos. As quatro figuras a seguir representadas foram desenhadas com base nesse símbolo. Em cada uma das placas está desenhado uma reta r. Em qual delas a reta r é um eixo de simetria? Coloca uma cruz na opção certa.

4. Descreve as simetrias (de reflexão e de rotação) que apresentam as seguintes imagens:



Anexo 23- Palavras Cruzadas "Isometrias" Soluções

Vertical

1- O que mesmo que simetria de rotação (radial)
3- Isometria que todos os pontos do transformado são obtidos rodando a figura inicial em torno de um ponto fixo, o centro de rotação, segundo um ângulo orientado no sentido positivo ou no sentido negativo (plural) (rotações)
5- entidade matemática que se carateriza por uma direção, sentido e comprimento (vetor)
12- Linha de reflexão (eixo)

Horizontal

1- Transformação geométrica que preserva o tamanho e a amplitude dos ângulos (plural) (isometrias)
3- Isometria em que todos os pontos da figura original se deslocam segundo a mesma direção, o mesmo sentido e percorrendo a mesma distância (translação)
5- Isometria em que cada ponto da figura original e o correspondente da figura estão sobre uma reta perpendicular ao eixo de reflexão e igual distância desse eixo (reflexão)
11- o mesmo que simetria por reflexão (axial)